C. DIBVADII IN GEOMETRIAM EVCLIDIS

prioribus ſex Elementorum libris comprehenſam

Demonſtratio Numeralis.

AD

CHRISTIANVM FRIIS
Cancelarium Regium.



LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Typographeîo Chriſtophori Guyotij.
Impenſis Ioannis Ioannidis Bibliopolæ Arnemenſis.
cIↃ. IↃ. c. III.

Amplissimo, Nobilissimo Clarissimoque viro

CHRISTIANO FRIIS

Serenissimi

CHRISTIANI QVARTI

Daniæ, Norvegiæ, &c.

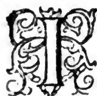
REGIS

Cancelario Magnifico,

BORREBYS TOPARCHÆ:

Almæ Hafniensis Academiæ, Conservatori *summo*,

Domino suo reverenter colendo.



NTER varias & multiplices dotes, quas Deus ille Princeps parens rerum Fabricatorque Mundi, admirabili suâ Providentiâ Homini indidit, quibus nullum sibi charius animal, nullum maiori sibi curæ fuisse, ostendere voluit, *Intellectus* HEROS AMPLISSIME, maximè eminere semper mihi visus est. Hic namque *Cogitationis* vi [quâ sanè continetur, cùm intelligentia quæ absque cogitationis usu subsistat, ne fingi quidem possit] numerosissimam rerum seriem, varietatem, proprietatem, affectus & indolem, percipit; sacrum Naturæ sinum, audacissimo nisu, ingreditur; omniaque intuitu suo lustrat perreptat. Huius subsidio, quæ terrori primis mortalibus Naturæ fuerunt Mysteria, mox admirationem, consumptâ novitate animis eorum induxerunt. Paulatim deinde hoc quod stupemus, ausus ipse diligenter & accurate attendere, in arcana Naturæ, sacrum misit *Ingenium*, & ex assiduis observationibus notisque redeuntibus, latentium *Ratione* collecta, pervenit ad causas. Ita quidem *Cogitationis* vim subtili consilio, admirabilique partium cohærentia, mutuoque inter se consensu, *Rationis* imperio prudenter submisit, eiusque Sapienti impulsu dirigi & contineri voluit. Ratio autem *Ordinis* est non confusionis. Sed in *Ordine* monarchiam tenet *Numerus*. Quare à primo ad ultimum *Intellectus* maxima in *Numeris* efficacia subsistit. *Hominem* itaque, cum sit ζῶον λογικὸν, si se vitamque suam sartam tectam manere, suæque Naturæ præstantiam durare & conservari

Primû dignitatis & præstantiæ Mathematica argumentû, ab intellectu sumptum humano.

cupiat, Ratiocinandi & Numerandi scientiam exercere, tenere, & custodire oportet, quemadmodum pulchre cecinit Epicarmus in fabula quam appellat πολιτείαν.

Ὁ βίος ἀνθρώποις λογισμοῦ κ' ἀριθμοῦ δεῖται πάνυ:
Ζῶμεν δ' ἀριθμῷ καὶ λογισμῷ, ταῦτα γὰρ σώζει βροτούς.

Et Divinus Plato in Epinomide, Εἰ γὰρ ἀριθμὸν ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως ἐξέλοιμεν, οὐκ ἄν ποτέ τι φρόνιμοι γενοίμεθα; sublato ex hominum natura numero, nequaquam fieri posse ait, ut quis prudens euadat. Constat autem naturam omnem salutis incolumitatisque suæ cupidissimam esse, omniaque circumspicere quibus tuta & defensa esse possit, nihilque omittere, ex quo commodum haurire aliquod possit. Artem itaque hanc constitui inprimis oportet, qua sola conservaretur & staret vita Humana. Ars vero Scientiâ nullâ firmata, vel nulla vel futilis est. Quare opus fuit & huic Arti, vitæ illo fundamento est stabilimento scientiæ. Ea causarum demonstrationibus continetur, quæ mirificà consensione & serie communi ordinis & rationis, per linearum descriptiones & figuras tota explicatur & perficitur, easque Græci ΓΡΑΜΜΙΚΑ'Σ ΑΠΟΔΕΙΞΕ'ΙΣ nominant, quarum scientiâ quicquid est certum & notū & immudabile in terris, solà & deprehendi & comprehendi potest. Scientiæ huic nomen GEOMETRIA est. Non illa quidem linearum ductibus figurarumque picturis otiose ludens, sed hoc agens atque efficiens ut mens & intelligentia *humana* reperiat & habeat, quo subsistat & nitatur in hac vita, ne aut opinionum vanitate aut errorum falsitate circumventa concidat, aboleatur, intereat. Τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν ut sapienter & vere protulit Plato VII. de republica. Hæc enim rerum generabilium vinculis, inconstantisque materiæ nodosa varietate exsoluta, quasique carcere quodam egressa, in substantiam incorpoream & impartibilem Abstrahendo se transformat, eamque animi nostri partem quæ διάνοια dicitur, ita instruit, ut rerum mobilem & polydædalam varietatem certo constantique nexu retinere possit, omniaque sublunaria inquieta & mobilia, admirabili artificio, perpetuitatis, constantiæ & quietis legibus custodit & gubernat. Ita hæc à Fortunæ procellis semota, in sublimi arce Rationis domicilium sibi effingens, nulli se in mundo rei applicari patitur, quam *animo Humano*. Sed humanus animus decerptus est *mente Divina*, cùm alio nullo nisi cum ipso DEO comparari possit. Familiarem itaque *numini* hanc esse scientiam existimandum est. Et sanè si quicquam de ijs quæ sunt supra nos pronunciare audacter oportet; nihil aliud Dij agunt quam *meditantur* & contemplantur. Virtutes siquidem alias, quibus homines censeri volunt immortalibus similes, Deo adsignare longè absurdum est. Versantur enim eæ circa affectiones, & ex pluribus similibus actionibus; & non tam per doctrinam quam ex proba educatione generantur. Divinum autem impatile est: & non per mores bonos aut honestam consuetudinem Dij

Secundum à Deo proprietate.

Assertio Philosophica.

sunt

sunt studiosi. Quin & virtutes habitus esse electivi traduntur. Electionem appetitus consultiuus praecedit. Consulimus autem de ijs quidem quae in nobis sunt, sed quorum tamen est incertus euentus. Deus autem & Deo quae continuè mentes assistunt, cum eas ne quicquam lateat, nec consulere nec eligere possunt, sed Divinae cuidem contemplationi eas, si licet, semper incumbere fas est: Ex quâ nec satiem concipiant nec fatigentur, tùm quia organo corporeo non agunt, quod labascere in opere consuevit, tùm etiam quia perfectissimum intelligibile, non excedentis sensibilis modo corrumpit, sed indies perficiat intellectum: cum nunquam totum ex integro capiatur. Contemplamur itaque non quatenus homines sumus, sed quia Divina quaedam in nobis portio & particula est: ob eamque causam in hoc pulcherrimum mundi rerumque consortium receptos nos, & per succedentium vices, in ordinem mortalitatis natos esse, Plato in Epinomide existimare videtur, ut cōtemplatores admirabilium Dei operum existeremus, cuius haec sunt verba, Ὃν κόσμον ἔταξε λόγος ὁ πάντων θειότατος, ὁρατόν. ὃν ὁ μὲν εὐδαίμων, πρῶτον μὲν ἐθαύμασεν, ἔπειτα δὲ ἔρωτα ἔσχεν τοῦ καταμαθεῖν ὁπόσα θνητῇ φύσει δυνατά, ἡγούμενος ἄριστα, οὕτως εὐτυχέστατά τε διάξειν τὸν βίον, τελευτήσας τε εἰς τόπους ἥξειν προσήκοντας ἀρετῇ. καὶ μεμυημένος ἀληθῶς τε καὶ ὄντως, μεταλαβὼν φρονήσεως εἷς ὢν μιᾶς, τὸν ἐπίλοιπον χρόνον θεωρὸς τῶν καλλίστων γενόμενος ὅσα κατ' ὄψιν, διατελεῖ. Quibus sane verbis nihil divinius dici potuit. *Quem Mundum (inquit)* ὁ λόγος *(id est Filius Dei) ordinavit, ille quidem omnium est Divinissimus: cuius homo beatus primum admiratione, deinde amore afficitur pernoscendi, quoad eius fieri potest per humani ingenij captum: qui quidem existimet optime sic atque felicissime vitam se traducturum: Et cum mortem obierit, ad locos se venturum virtuti consentaneos & convenientes, cum interim & vere & reapse sacris initiatus, unus ipse demum unius particeps prudentiae, reliquum omne tempus spectator futurus sit & contemplator rerum pulcherrimarū quae sub adspectum cadere possunt, id est corporum caelestium.* Sed scientiarum nullae fortiores meditationes, aut firmiores contemplationes requirant, quam quae de genere sunt Mathematicarum, idque vehementius, quo puriores eae fuerint. Purissimae autem omnium consensu, sunt *Arithmetica & Geometria.* Proxime ergo hae ad Divinam efficaciam accedunt: imo quod mirandum est, in his omnia creavit altissimus, ut mortalium quotquot fuerunt unquam Sapientissimus Solomon fassus est. Socordes ergo & abiectos & degeneres eos homines esse oportet, quos rerum creatarum praestantia & nobilitas nihil afficit, quos ad speculandum & contemplandum non incitat. Vix talia monstra benigna mater natura unquam produxit, nisi forte statuas quasdam effigiem gerentes humanam, erectas ambulare credendum, quae nihil intrinsecus mentis aut animi contineant. Absit quenquam eruditum aut sapientem illarum moveri multitudine. Nonne antea scientias has nulli rei commisceri posse pronunciavimus quam animo humano. Qui ergo

Tertium à creatione.

solummodo effigiem hominū gerunt, non animum; hæc percipere, cognoscere aut intelligere poterunt? Existiment potius ij, qui præter corporis truncum, aliquid in se aliud continent, res creatas dignas esse, quæ mentis nostræ sinu excipiantur, & ad speculandum dirigantur, cum summo & glorioso Deo, eas creare & producere cura fuerit. Sed perfectè eas intelligere, examinare & cognoscere, haud poterimus, nisi eadem accersiverimus nobis initia, quæ in prima earum productione Deus adhibuit. Adhibuit autem *pondus numerum & mensuram*. Arithmeticam itaque & Geometriam & Isoropicam, ante omnia perdidicisse oportet, priusquam rerum contemplationi nos accingamus: Vnde parum, multos in naturalium cognitione proficere, non mirum, cum omnes ferè his destituti præsidijs, plenis faucibus, manus & pedes quod aiunt illoti, in naturæ arcana irruant.

Obiectiones quædam refelluntur.

Et sanè impune eos suo periculo insanire liceret, si animi istum sui venenosum morbum, ad aliorum perniciem non converterent, cùm dignitatis ingressi possessionem alienæ, de hac etiam arte nostra, cuius plane ignari sunt, iudicium sibi esse velint. Hi enim ut philosophiam ferè universam conlatrarunt, & in argutias præcepta eius omnia abegerunt, ita & artem hanc è certitudinis suæ sedibus deijci posse existimantes, argutijs nonnullis eam debellare temerario nisu, & infelici successu aggressi sunt, ut clariorem vim eruditionis quærentes, solis tamen eius splendore territi, sub umbra magni nominis delitescerent.

Obiectio quod pura mathesis non usibus servit humanis.

Quid ergo! Numquid eam ob causam contemni hæc scientia debet, quod nihil adiuvet communi hominum vitæ necessarias utilitates? Nullo certè modo. Ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tanquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum necessaria suppeditatione, sese quam longissimè soleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetens, quibus usus vitæ necessarius cōtineri solet. Homines enim, rerum ad usum vitæ necessarium comparandarum occupationibus vacui planè solutique, sese ad sciendum, scientiæque adeptionem contulerunt: nec immerito; cùm prima cura rerum illarum esse debeat, quibus natura ipsa ad sui educationem & tuitionem carere nullo modo potest. Huic si quando satisfactum erit, hoc est, si naturam ducem consequuti, cupiditatem habendi rerum necessariarū, modo naturàque metiri voluerimus, tum vero illa nos cogitatio debet excipere rerum à necessitate generationeque remotarum, & verum ipsum proximè attingentium; quod cum acciderit, tum quoque id quod in anima nostra incoatum & rude fuerat, integrum absolvetur & perpolitum. Est & *Mathematicæ* scientiæ sua certa propriaque dignitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda, neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque vitæ necessitati subserviens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictæ, sui nominis dignitatem sustinere tuerive nullo

modo

modo possent, si ad serviendum usibus necessarijs revocentur. Verissimum itaque est, qui contemptui habendum hoc studium hanc solam ob caussam existimant, eos sine gustu esse summarum quæ quidem in homine libero constantique, existere possunt, voluptatum. Quantum etiam utilitatis ea scientia communi hominum vitæ & societati conferat, cum extremi eius effectus, materialibus se rebus misceant, satis ex ijs quæ coram clementissimo Rege nostro fassi sumus, liquet; & nunc Divinus Hippochratis locus, in studio nostro medico, ut quæ ad principes & rempublicam propriè spectare videntur omittam, hoc ipsum comprobabit. Sic autem scribit in epistola ad Thessalum filium. Ἡ μὲν τῆς γεωμετρίης ἱστορίη ἴσωσ πολύχρηος τε καὶ πολυειδὴς καὶ πᾶν μετ' ἀποδείξιος περαινομένη, ἔστω χρησίμη πρός τε τὰς τῶν ὀστέων θέσιας, καὶ ἐξαρθρήσιας, καὶ τὴν λοιπὴν τῶν μελέων τάξιν. Ἡ δὲ τῆς ἀριθμήσιος τάξις, πρός τε τὰς περιόδους καὶ ἀλλαγὰς τῶν πυρετῶν. καὶ τῆς ἐν νούσοις ἀσφαλείης ἀρχίνου ἔστω. Præter hæc & nostra de humani corporis symmetrica dimensione, & vaporum in eo latione isoropica, quæ meditamur volumina, artis suo tempore in *Medicina* utilitatem & necessitatem ostendent. Quam itaque immensas & varias ex se *Mathesis* ad publicum utilitates effundat, satis quæ attulimus demonstrarunt.

Mechanica Mathesis.

Alia adhuc sed debiliora eos dubia movere non est novum, ad quæ respondere brevitatis me ratio, prohibet. Cùm enim ut ad existentiam res, ita quoque ad cognitionem se habeant, cognitio tantum una erit, cum esse sit unum, quare & veritas quoque una erit. Ab unitate ergo & rei ueritate devios plurimis modis & quasi infinitis errare necesse est. Ex propria itaque ignorantia & erroribus plurimis, artem hanc delere aggrediuntur. Ars itaque non naturâ suâ sed illorum opinione contemptui exponitur, sibi enim de eo iudicij licentiam sumunt, cum iudicandi potentiam non habeant, quòd eo intelligendi & cognoscendi modo plane exuti sint. Sed ponte tandem deiecti muliercularum more, quicquid eis in animo supererat virium, in calumnias converterunt. Mathematicis in sermone barbariem, in fortunæ bonis tenuitatem obijciunt, ignari veritatem nec inquinari Solœcismis, nec ornari Atticismis. Verum est omnes qui contemplationi grauiter incumbunt, corpus & rem ipsam, fortunasque suas minuere & attenuare, cùm ad principum fauorem & popularem auram captandam, minus illis a gravioribus studijs otij supersit. Sed versâ nunc rerum facie, nec elegantiâ sermonis, nec principum & potentum favore carent. Chari sunt Imperatoribus & Regibus, grati Principibus & Nobilibus, accepti Rebuspublicis & Vrbibus. Ita hodie clarissimos viros A. Romanum, C. Clauium, F. Barocium, F. Vietam, G. Vbaldum è Marchionibus, I. Alcalmum, I. Dee, L. Schonerum, L. van Collen, S. Stevinium, Vtrumque Snellium T. Finkium, aliosque complures, Italia, Gallia, Hispania, Anglia, Dania, Germania, & Belgium, colunt mirantur, suspiciunt. Nisi enim manifesta ab illis ad rempublicam promanare commoda, potentes viri percepissent,

Origo omnis dubij in animo humano.

Calumnia in Mathematicos sparsa, diluitur.

Ordinē alphabeti secuti sumus, ne quis nos hic Criticū agere existimet.

eorum

solummodo effigiem hominũ gerunt, non animum; hæc percipere, cognoscere aut intelligere poterunt? Existiment potius ij, qui præter corporis truncum, aliquid in se aliud continent, res creatas dignas esse, quæ mentis nostræ sinu excipiantur, & ad speculandum dirigantur, cum summo & glorioso Deo, eas creare & producere cura fuerit. Sed perfectè eas intelligere, examinare & cognoscere, haud poterimus, nisi eadem accersiverimus nobis initia, quæ in prima earum productione Deus adhibuit. Adhibuit autem *pondus numerum & mensuram*. Arithmeticam itaque & Geometriam & Isoropicam, ante omnia perdidicisse oportet, priusquam rerum contemplationi nos accingamus: Vnde parum, multos in naturalium cognitione proficere, non mirum, cum omnes ferè his destituti præsidijs, plenis faucibus, manus & pedes quod aiunt illoti, in naturæ arcana irruant.

Obiectiones quædam refelluntur.

Et sanè impune eos suo periculo insanire liceret, si animi istum sui venenosum morbum, ad aliorum perniciem non converterent, cùm dignitatis ingressi possessionem alienæ, de hac etiam arte nostra, cuius plane ignari sunt, iudicium sibi esse velint. Hi enim ut philosophiam ferè universam conlatrarunt, & in argutias præcepta eius omnia abegerunt, ita & artem hanc è certitudinis suæ sedibus deijci posse existimantes, argutijs nonnullis eam debellare temerario nisu, & infelici successu aggressi sunt, ut clariorem vim eruditionis quærentes, solis tamen eius splendore territi, sub umbra magni nominis delitescerent. Quid ergo? Numquid eam ob causam contemni hæc scientia debet, quod nihil adiuvet communi hominum vitæ necessarias utilitates? Nullo certè modo. Ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tanquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum necessària suppeditatione, sese quam longissimè soleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetens, quibus usus vitæ necessarius cõtineri solet. Homines enim, rerum ad usum vitæ necessarium comparandarum occupationibus vacui planè solutique, sese ad sciendum, scientiæque adeptionem contulerunt: nec immerito; cùm prima cura rerum illarum esse debeat, quibus natura ipsa ad sui educationem & tuitionem carere nullo modo potest. Huic si quando satisfactum erit, hoc est, si naturam ducem consequuti, cupiditatem habendi rerum necessariarũ, modo naturáque metiri voluerimus, tum vero illa nos cogitatio debet excipere rerum à necessitate generationeque remotarum, & verum ipsum proximé attingentium; quod cum acciderit, tum quoque id quod in anima nostra incoatum & rude fuerat, integrum absolvetur & perpolitum. Est & *Mathematicæ* scientiæ sua certa propriaque dignitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda, neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque vitæ necessitati subserviens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictæ, sui nominis dignitatem sustinere tuerive nullo

Obiectio quod pura mathesis non usibus servit humanis.

modo

modo possent, si ad serviendum usibus necessarijs revocentur. Verissimum itaque est, qui contemptui habendum hoc studium hanc solam ob causam existimant, eos sine gustu esse summarum quæ quidem in homine libero constantique, existere possunt, voluptatum. Quantum etiam utilitatis ea scientia communi hominum vitæ & societati conferat, cum extremi eius effectus, materialibus se rebus misceant, satis ex ijs quæ coram clementissimo Rege nostro fassi sumus, liquet; & nunc Divinus Hippochratis locus, in studio nostro medico, ut quæ ad principes & rempublicam propriè spectare videntur omittam, hoc ipsum comprobabit. Sic autem scribit in epistola ad Thessalum filium. Ἡ μὲν τῆς γεωμετρίης ἱστορίη ἔστω πολύχρημος τε καὶ πολυειδὴς πᾶν πᾶν μεθ' ἀποδείξιων περιγινομένη, ἔσται χρησίμη πρός τε τὰς τῶν ὀστέων θέσεις, καὶ ἐξαρθρήσιας, καὶ τὴν λοιπὴν τῶν μελέων τάξιν. Ἡ δὲ τῆς ἀριθμήσιος τάξις. πρός τε τὰς περιόδους καὶ ἀλλόγενς τῶν πυρετῶν. καὶ τῆς ἐν νούσοις ἀσφαλείης ἀρχίνου ἔσται. Præter hæc & nostra de humani corporis symmetrica dimensione, & vaporum in eo latione isoropica, quæ meditamur volumina, artis suo tempore in *Medicina* utilitatem & necessitatem ostendent. Quam itaque immensas & varias ex se *Mathesis* ad publicum utilitates effundat, satis quæ attulimus demonstrarunt.

Mechanica Mathesis.

Alia adhuc sed debiliora eos dubia movere non est novum, ad quæ respondere brevitatis me ratio, prohibet. Cùm enim ut ad existentiam res, ita quoque ad cognitionem se habeant, cognitio tantum una erit, cum esse sit unum, quare & veritas quoque una erit. Ab unitate ergo & rei ueritate devios plurimis modis & quasi infinitis errare necesse est. Ex propria itaque ignorantia & erroribus plurimis, artem hanc delere aggrediuntur. Ars itaque non naturâ suâ sed illorum opinione contemptui exponitur, sibi enim de eo iudicij licentiam sumunt, cum iudicandi potentiam non habeant, quòd eo intelligendi & cognoscendi modo plane exuti sint. Sed ponte tandem deiecti muliercularum more, quicquid eis in animo superetat virium, in calumnias converterunt. Mathematicis in sermone barbariem, in fortunæ bonis tenuitatem objiciunt, ignari veritatem nec inquinari Solecismis, nec ornari Atticismis. Verum est omnes qui contemplationi grauiter incumbunt, corpus & rem ipsam, fortunasque suas minuere & attenuare, cùm ad principum fauorem & popularem auram captandam, minus illis à gravioribus studijs otij supersit. Sed versâ nunc rerum facie, nec elegantiâ sermonis, nec principum & potentum favore carent. Chari sunt Imperatoribus & Regibus, grati Principibus & Nobilibus, accepti Rebuspublicis & Vrbibus. Ita hodie clarissimos viros A. Romanum, C. Clauium, F. Barocium, F. Vietam, G. Vbaldum è Marchionibus, I. Alealmum, I. Dee, L. Schonerum, L. van Collen, S. Stevinium, Vtrumque Snellium T. Finkium, aliosque complures, Italia, Gallia, Hispania, Anglia, Dania, Germania, & Belgium, colunt mirantur, suspiciunt. Nisi enim manifesta ab illis ad rempublicam promanare commoda, potentes viri percepissent,

Origo omnis dubij in animo humano.

Calumnia in Mathematicos sparsa, diluitur.

Ordinē alphabeti secuti sumus, ne quis nos hic Criticū agere existimet.

eorum

eorum nunquam fortunis tantum incrementi, aut eruditioni dignitatis adlescissent. Non hodie principes viri ex persuadentium nutu, sed ex variarum rerum cognitione pendent, adaperti ipsis oculi sunt, nudam & nitidam pulcherrimæ veritatis faciem intuentur ipsi, tantumque eloquentiæ permittunt, quantum per se ipsa in se rei & veritatis continet. Fucum hoc æuo facere magnatibus, non est facile. Vnde spes mihi revictura aliquando hoc quoque æuo Archimedæa ingenia, quæ altum illud editumque rerum maximarum fastigium, quod in Mathematica speculatione sepultum iacet, attingent & in lucem proferent, si reprehensione Censoria proteruam hanc & audacem ignarorum petulantiam, Magni & potentes viri, Regio Hieronis exemplo cohereceant. Hic enim cum vehementes & fructuosas reipublicæ, Archimedis imaginationes philosophastrorū nugis sæpius interturbari animadvertisset, Regia auctoritate interposita, talia in posterum fieri, publico diplomate prohibuit: Α'πὸ ταύτης τῆς ἡμέρας. περὶ παντὸς ΑΡΧΗΜΗ'ΔΙ πιστευτέον, neminem ab hoc die Archimedi reluctaturum pronuncians. Sed inculcatas persuasiones immutare longe est difficilimum, cum nemo non didicisse malit quam discere, & qualecumque ingressi iter à teneris, probamus. Sed his tandem modum imponamus, ne minus gratiæ præcipiendo recta, quam offensæ reprehendendo prava mereamur. nihil enim à natura mea alienum magis, quam reprehendendi studium, quare & à calumnia me liberaverit reprehendendi verecundia.

Quartum argumentū ab animalibus. Illud etiam, quod hoc loco non commodè prætervero, multorum animis summam haud dubie admirationem incutiet; Mathematicam scientiam, quibusdam quoque animalibus à summo Creatore infusam esse, ut ex ea ad vitæ traductionem commoda haurirent, non leve necessitatis & utilitatis eius in societate humana indicium. Ita nonnulla reperiuntur animalia, quæ Opticam, nonnulla quæ Isoropicam, nonnulla quæ Geometriam intelligere videntur. *Equus.* Superbum & arrogans animal iubarum pulchritudine Equus, nunquam cum Asina coire vult, nisi turpitudinem suam detonsa iuba ad fontis limpidum speculum recognoscat. *Grues.* Lapillos, secessus tepidos querentes Grues, ore gerunt, quibus proiectis, sentiunt an super terras an super aquam volent. *Apes.* Si leves Apes iniquior aura in divia abripuit, ad dirigendos in destinata cursus modico lapilli pondere librant alas. *Arachnea.* Arachneæ subtilia telarum filamenta in circuli formam, redigunt, & in medijs cassibus excubare consueverunt; quia cum æquales sint quæ à centro ad ambitum usque excurrunt rectæ, in medio consistens pedibus vincta tenens filorum, quæ nevit exordia, undique persentire potest, si quæ in plagas temere bestiola convolarit. *Apes.* Me autem ipsius Apum operis præcipue admiratio subit; non est temerè, nec fortuitam figuram & sedes reponendis cibis quæsiverunt, rudis cera componitur, accedit usibus inenarrabilis decor. Nam primum tenacibus vinculis fundamenta suspendunt, tum ab exordio opus

opus æqualiter crescit, nec quicquam ex incoatis paruum est, quod non sua portione perfectum sit, ut simmetriæ & proportionis rationes obseruare videantur. Quæ autem in mellis receptacula vasa extruunt, æquabilia, similia & inter se cohærentia sunt, specie autem Hexagona, ne intervallum aliquod deformi rima hiaret, idque non absque Geometricâ providentiâ. Figuras enim cohærentes & latera habentia communia, ne aliud quippiam incidens in loca quæ interijciuntur eorum opera labefactaret & corrumperet. cum eligere apibus fuit animus; tres solummodo rectilineæ & ordinatæ figuræ reperiuntur, quæ id quod apibus propositum est efficere possunt. Sola enim Triangula, Quadrata & Hexagona, sibi invicem angulis hærent, & ita mutuo vinciuntur & alligantur, ut locũ qui est circa idem punctum exactè replere possint. Locum enim circa idem punctum, sex æquilatera triangula replent, & sex anguli, quorum unusquisque duarum tertiarum recti est: tum quatuor quadrata, & quatuor ipsius anguli recti: tum tria hexagona & tres hexagoni anguli, quorum unusquisque rectum & recti tertiam continet. Sed pentagona tria minora sunt quam ut circa idem punctum positum spatium replere possint, quatuor vero maiora. Tres siquidem pentagoni anguli, quatuor rectis minores sunt, etenim unusquisque rectum & recti quintam continet, quatuor autem anguli quatuor rectis maiores sunt. At neque heptagona tria circa idem punctum constitui possunt, aptatis inter se lateribus. Tres enim heptagoni anguli, quatuor rectis sunt maiores; quod unusquisque rectum & tres recti septimas contineat. Eadem ratio multo magis procedet in ijs, quæ plures angulos habent. Cum igitur tres figuræ sint, quæ locum circa idem punctum consistentem replere per se possunt, triangulum scilicet, quadratum & hexagonum, apes illam quæ ex pluribus angulis constat, ad structuram sapienter delegerunt, utpote suspicantes illam plus mellis capere posse, quam utramque reliquarum, nimirum æquali materia in constructionem uniuscuiusque cõsumpta, quod & oculis si res ad numerorũ certitudinem examinetur, quasi cernere & intueri licet. Si enim æqualem Trigoni, Quadrati & Hexagoni ordinati ponamus ambitum, qui XXIV pedum sit, Trianguli capacitas XXVII $\frac{7}{10}$ $\frac{128}{000}$ $\frac{129}{000}$ *erit, per secundum lemma huius:* Quadrati vero XXXVI & Hexagoni XLI $\frac{5}{10}$ $\frac{692}{000}$ $\frac{193}{000}$ *ut ex commentario nostro in prop.20. lib.6. elicitur.* Luce ergo clarius est, Trigonum Quadrato, Quadratum Hexagono minus esse. Quis non stupet hæc ab apibus nullâ accedente manuum ope effici, nullâ interveniente doctrinâ, hanc scientiam nasci, quam mortalium nulli, solis exceptis *Mathematicis*, assequuntur.

Satis ut opinor VIR MAGNIFICE, tum ex interno rationis gremio, tum ex brutorum indole, quam nec opinio nec eloquentia quod in humanis accidere solet, corruperunt, conquisitis argumentis necessitatem & integritatem artis demonstravimus, quam tot annorũ millia quibus hæc mundi

moles constitit, approbarunt, tot principum & potentum favores restaurarunt & coluerunt. Multa quidem negligentia & ignorantia bona subducunt mortalibus. Sed Ignorantiam mentis cæcitatem viriliter expugnavimus artis necessitate, & in humanis utilitate ostensâ; artemque ipsam *Euclide* gravissimo auctore præeunte docuimus, illustravimus, novisque Numerorum Fundamentis stabilivimus. NVMERORVM inconcussa est veritas, eorumque ars artium omnium, attestante Platone certissima est, quorum subsidio infinita problemata solvuntur, nova inveniuntur, inventa demonstrantur. Nec solummodo Numeri Rationales, quos etiam ubique ex *Decarithmiæ* legibus adhibuimus, Irrationalium potestate proximâ ad libitum resoluta, *Mathematico* sufficiunt, sed Irrationales quoque in quos Rationales paulatim transformantur, Geometræ sunt necessarij, qui verè Geometrici numeri sunt, si modo Geometrica est propositio XLVII lib. I. auctoris nostri, à qua surdi omnes promanarũt. Eiusmodi itaque Numeros Demonstrationibus nostris inseruimus, tum ut manifestior & certior redderetur veritas, tum ut antiquum priscorum *Mathematicorum* morem reduceremus, quem usitatum olim fuisse, pulchrè his verbis Eutocius Ascalonita in commento ad prop. II. lib. I. Apoll. Pergei ostendit, *Non perturbentur qui in hoc inciderint, quod illud ex Arithmeticis demonstretur, antiqui enim huiusmodi demonstrationibus sæpe uti consueverunt, quæ tamen Mathematicæ potius sunt, quàm Arithmeticæ, propter analogias. adde quod quæsitum Arithmeticum est; nam proportiones, proportionum quantitates & multiplicationes, primo numeris, secundo loco per numeros & magnitudinibus insunt, ex illius sententia, qui ita scripsit,* ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφα. Certè si eam affinitatem agnovissent Pentaposi illi Circuli Quadrarij, tam stupendos errores, quibus omnibus risui fuerunt, nunquam commisissent, imo, ut uerbo dicam, *Omnem pseudomathematicis errandi occasionem, sola hac Numerorum ignoratio peperit.* Quam itaque necessaria sit *Euclidi* hæc lux, judicent viri, omni vitæ suæ tempore in his studijs exercitati & subacti, quibus si grave nimis fuerit, tantum subtilissimis suis meditationibus temporis subtrahere, quantum Opellæ nostræ perlectio requireret, tribus clarissimis & doctissimis juvenibus D.M. Iohanni Birkitto, D. Georgio Fuyren, D. Petro Cornelij Houteno, liberam censuram permittimus, ne judicium cuiusquã qui, ut ij, rectè & solide judicare potest, subterfugere videamur. Nec quisquam aliorũ honori qui ante nos in *Euclide* illustrando accupati fuerunt, quicquam decedere hoc novo cõmento existimet, clari enim ij sunt, beneque de omnibus meriti, qui tamen omnia si complexi forent, consuluissent labori meo; sed & eos ut præceptores veneramur & colimus, nec eorum laudi tempus ullum deerit, ad posteros enim virtus durabit, non præveniet invidia: nobis nulla hîc ex alieni nominis ruina, quæsita gloria est, sed *Artis* perfectio & discentiũ utilitas. Ignorantiam CANCELARIÆ MAGNIFICÆ mortalium pe-

[illegible] censet plurimos Buteo.

ctore

ctore eijcere tentavimus, sed Negligentiam quæ torpor quidam est animi, delere, nostrarum non est virium, illa res Regum Principum & Potentum est, quibus magna vis & auctoritas inest ad incitandum, ampla fortunæ ad juvandum. Tibi itaque VIR INCLYTE, cui præter hæc neque ad acumen ingenij doctrinæ cultus, neque ad doctrinā iudicij vis deest, munus hoc rectè cōvenit quod iam aliquot annos honorificè & splendidè in præfectura Almæ Hafniensis Academiæ Exercuisti, cum magno eruditionis veræ incremento & eruditorum omnium solatio & commodo. Sub umbone itaque & tutela tua, cum Universa Regni nostri studia eorumque Professores conquiescant, nullius quā tuo patrocinio me meosque hos conatus melius & tutius committi aut credi posse existimabam, cuius constantem ergo Musas benivolentiam tot annorū in doctos favor demonstravit. Opus itaque hoc qualecunque nostrū, certius erectæ erga te & studia voluntatis nostræ, quam magni in studijs progressus indiciū, in tutelam tuam VIR ILLVSTRISSIME recipere ne graveris, eamque in me meaque studia benivolentiam effundere, quam erga alios antea exercuisti, ita & stimulos ad sublimiora multo labore & industria investiganda mihi indes, & laboris tedium, torpore omni excusso mitigabis. Æternus ille auctor & conditor rerum Deus, magno pietatis & eruditionis commodo, terris nostris diu te saluum cōmodet, cui laus in æternum. Vale. Lugduni Batavorum III Kal. Novemb. Anno salutis 1603.

M. T. Ad

CHRISTOPHORVS DIBVADIVS,
Doctor Medicus & Mathematicus.

IN CL. V.
CHRISTOPHORI DIBVADII
Zelando-Dani
Demonstrationem EVCLIDIS Numeralem.

SCIENTIARVM *nulla in orbe est certior*
Quàm quæ professa nomen est Matheseôs.
Huiusce certitudinem si quis volet
Et Veritatem Scepticus convellere;
A lineis numerisque demonstratio est

*Eutocius Ascalonita in Apollon. Pergæum libri primi Prop. XI.

*(Geminis, ut * ille tradidit, sororibus)*
Petenda, quæ negantibus faciat fidem.
Prioris usu, & linearum ductibus
Sunt qui Mathesis principum problemata
Elucidarunt & probarunt plurimi.
Numeralis at probatio iacuit diu
Neglecta & ignorata multis seculis.
Laus ergo magna DIBVADI *te manet*
Per quem sorori reddita est soror suæ.
Nam quæ Mathesis mutila hactenus fuit,
Numeris modo absoluta per te est omnibus.

B. VVLCANIVS, Græcæ
linguæ Professor.

Lof-schrift, tot den hooch ghelcerden Doctor CHRISTOPHORVM DIBVADIVM, *mijnen besonderen vriendt.*

COMT schept nu vrucht, en leert te recht verstaen,
Die vonden subtijl EVCLIDIS vermaert
V hier ghesteldt, volcomen na den aert
Door tellens const bewijs, diepsinnelijck begaen.
Comt schept nu vrucht, doorwandelt meede wel dees paen,
Die recht ghebouwt sijn, vant onrecht scheyden waert
Ons nae ghelaten van eenich onbewaert,
Wiens dwaling hier bekent, prijst diet u heeft ghedaen
Dees Lof comt u DIBVADI hooch gheleert,
Als ghy ons hier met vrucht seer schoon vereert
Vwes cloeck verstants, dat veel heeft doorsocht:
In *Meet-const* siet men ghy *Archimedis* lof verweckt,
In *Ster-const* niet te min sijn wetenschap niet ontbreckt
Hippocratis bonden-vast seer luitich hebt ontknocht.

T. LVDOLPHVS *van Collen, Professor Mathematum Leyde.*

In D. Medi.

In D. Medicinæ CHRISTOPHORUM DIBUADIUM commentarijs illustrantem libros EUCLIDIS.

CUM virtus, probitas, rerumque peritia abundè
Illos extollant, quorum hæc hæsere medullis,
Quid memorem laudésque tuas, nomenque, decúsque?
O te felicem, DIBUADI! qui pede fausto
Ad metam pleno potuisti tendere cursu,
Nec patriam fugiens, hoste exturbante superbo,
Otia nec temnens studiorum καθαριζων:
Te sequimur, non absque morâ, nunc fataque cernunt
Nobis dura pati, nec adhuc nos respicit illa
Libertas, quo sera, tamen gratissima nobis,
Sed nec sera venit; nec adhuc nos respicit illa;
Quâ, Deus, ut tandem tranquillâ in pace fruamur
Te quæso, ac nostris tandem, pater, annue votis.
Sed quid ego hæc refero? cunctos sua fata manebunt.
EUCLIDIS quædam dias in luminis oras
Venerunt jam clara, sed antè obscura jacebant;
Tu DIBUADI, macte animo, tua vivida virtus
Fac sis EUCLIDEM nobis totum edere pergat:
Exiguus non iste labor, sed nec decus inde
Esse minus poterit, decet hæc graviora capessas.
Naturæ interea sacræ penetralia rimans,
Semina eruns auri longo lentoque calore
Elicienda tibi, doctorum scripta virorum
Ut perhibent, atque illa suo tibi lacte fovenda;
Quæ nactus, cupiens felicem ducere vitam,
VIVE DEO, quantumque potes mortalia sperne:
Optimus ille parens eadem si fortè negârit,
Nec tetricum nactus vultum, rebúsque minutus,
Corpore nec læsus (quæ sunt ludibria vulgi)
VIVE DEO quantumque potes mortalia sperne.

Hæcce tui studio conscripsi, mi DIBUADI;
Id solum placeat, velle placere tibi.

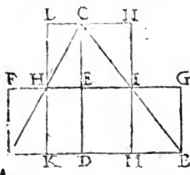
A. G. V.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΟΝ

Cvm posterior hæc operis nostri pars, τῆς ἀκριβείας demonstrationum parte priore in lineis confectarum, tanquam δημιουργία quædam sit; τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων εὑρεῖν, apprime instituto nostro inserviet. Duo ergo *Lemmata* quæ vniversum negotium absolvant præmittemus, & cum alijs domonstrabimus, quorum frequens in sequentibus occurret usus.

Lemma I.

Ex tota basi & dimidio perpendiculo, vel ex demidia basi & toto perpendiculo factum rectangulum, trianguli areæ æquale est.

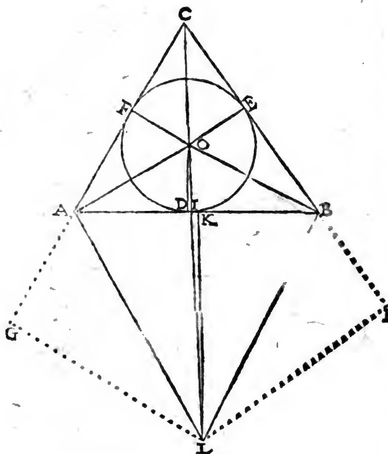


12. *Primi.* Puncto C, trianguli ABC in basin AB per-
10. *Primi.* pendicularis CD cadans in E puncto æqui-
bisecetur, & per E, recta FG ab extremitati-
11. *Primi.*
31. *Primi.* bus basis emergentes perpendiculares AF,
BG excipiens, basi parallela & æqualis agatur. Dico ita factũ rectangulum AG. trian-
10. *Axiom.* gulo ABC æquale esse. Quia enim CE &
15. *Primi.*
26. *Primi.* GB rectæ ex fabrica æquales sunt, & duo
anguli CEI, *cie* duobus IGB, *gib*, æquales sunt, triangula CEI. GIB inter se æqualia erunt. Ob eandem rationem CEH, AFH triangula, æqualia quoque erunt. Est autem AHIB trapezium triangulo
2. *Axiom.* ABC, & rectangulo AG commune. Rectangulum itaque AG, trian-
10. *Primi.* gulo ABC æquale est.
12. *Primi.* Rursus æquibisecetur AD in K, & DB in M, punctis intersectio-
42. *Primi.* num K & M, rectæ KL, MN perpendiculo CD parallelæ & æquales ducantur, & connenctantur LN. Sunt ergo DL, *dn* rectangula, ADC, *bdc* triangulis æqualia. Sed ADC, BDC triangula composita, totum ABC triangulum constituunt. Rectangulum itaque KN & ABC triangulum inter se æqualia sunt. Est autem CD perpendicularis rectanguli KN altitudo, ex fabrica, latitudo vero KM dimidio basis æqualis; eo quod totæ rectæ AD, DB totam AB componant, quare dimidiæ KD, DM dimidium rectæ AB constituent. Ex dimidio itaque basis & integro perpendiculo factum rectangulum, triangulo æquale est, quod demonstrandum erat.

13. Secun. *In numeris perpendicularis* AD $11\frac{1}{5}$ *erit, cum* AB 15, AC 13 BC 14
47. Primi. *fuerit.* DE *itaque* $5\frac{3}{5}$ *erit. Si* DE *in* AB *ducatur prodibunt* 84 *pro area trianguli* ABC, *& si dimidia* AB $7\frac{1}{2}$ *in* CD $11\frac{1}{5}$ *ducatur, tantundem prodibit pro area trianguli. Tres ergo figuræ,* AG, KN, ABC *inter se æquales sunt.*

Lemma

Collecto dimidiorum dati trianguli laterum, singulis lateribus ablatis, ex residuis & collecto nati producti latus, aream æquat.



Priusquam vero Theorema hoc demõstremus, advertendum, *quadrati latere in aliquẽ numerum bis ducto, productũ æquari eo, quod ex eiusdem lateris quadrati cũ eodem numero multiplicatione oritur. Ut si 2 in 8 bis ducas, perinde erit ac si 4 cũ 8 multiplices.* Triangulo itaque ABC circulus inscribatur, è cuius centro O, in singula trianguli latera, perpendiculares OD, OE, OF, demittantur, quæ æquales erunt, cum eiusdem circuli radij sint. Ab eodem Centro in singulos angulos lineæ OA, OB, OC, cadant. Ex dimidio ergo datorum AB, BC, CA laterum & perpendicularium aliquo ut OF rectangulum factũ, trianguli areæ æquale erit, per lemma præcedens. Sunt autem AF, AD; BD, BE; CE, CF, inter se æquales. Si ergo CA protrahatur in G ita ut AG sit BD æqualis, & CB in H, donec BH fiat AD æqualis, erit CG sive CH dimidio trianguli laterũ æquale. Rectangulum sub CG & OF radio cõprehensum (hoc est area trianguli) inter eorundẽ laterũ quadrata, mediũ est proportionale, eo quod quadratũ de CG in eadẽ altitudine est cum rectangulo, & rectangulum eandem habet altitudinem cũ quadrato radij. Puncto G ad CG perpendicularis GL erigatur, cum CO protracta in L puncto coiens, & altera perpendicularis HL puncto H excitetur, quæ GL æqualis erit [singulæ enim, anguli GCH, dimidiũ subtendunt.] Notetur AG ab A versus B in K, ita ut AK sit AG æqualis, & connectantur LA, LB, LK. Evidens est quadratum de LA, æquale quadratis de AG, GL, quadratũ de LB tantum excedere, quantũ quadratum

4. *Quarti.*
12. *Primi.*
4. *Primi.*
4. *Primi.*
19. *Primi.*
13 *Secundi.*

tum de AK excedit quadratum de BK. Est ergo LK ad AB perpendicularis, & angulus AKL necessariò rectus. Sunt itaque GAK, KLG

Ex 32. Pri. vel ex 31. & 21 Tert. anguli, in AKLG quadrilatero duobus rectis æquales, ut & GAK, CAK anguli. Si communis GAK angulus auferatur, relinquentur GLK, CAK inter se æquales, & dimidius GLA, dimidio CAO angulo æqualis erit. Triangulum itaque FAO triangulo GLA simile erit, & rectangulum sub radio FO & GL comprehensum, æqualo erit FAG rectangulo. Sed quadratum radij ad rectangulum sub GL & radio contentum, est ut ra-

1. Sexti. dius ad GL, hoc est ut CF ad CG. Erit itaque CF ad CG ut qua-

4. Sexti. dratum radij, ad rectangulum sub radio & GL contentum, quod FAG

11. Quint. rectangulo æquale est. Sunt ergo quatuor magnitudines proportionales, ut CF, ad CG, ita quadratum radij, ad FAG rectangulum. Si itaque quadratum radij FO cum CG multiplices, tantundem orietur, ac si re-

16. Sexti. ctangulum FAG cum CF recta multiplicares. [quod est tres inter se differentias seu residua, multiplicare. Nam cum CG laterum dimidio & AD, *db* rectis AF, *ag* æquentur, FC differentia erit rectarum CG, AB; sunt & CE, *eo* rectis CF, *ag* æquales: AF itaque rectarum CG, CB differentia est, & rectarum CG, CA differentia est AG.] Et si à quadrato radij & CG recta quod fit denuo per CG multiplices, tantundem emerget ac si rectæ CG & radij quadrata inter se multiplica-

17. Sexti. res; Producti huius latus, medium inter rectarum CG, FO, quadrata, proportionale erit, & per consequens trianguli ABC areæ æquale, quæ antea inter eadem quadrata, media proportionalis est ostensa. Collecto itaque, &c.

Lemm. 1. *Latera trianguli* ABC *sint ut superius, eorum ergo summa erit* 42, *à cuius dimidio* 21 *singulis lateribus ablatis, relinquuntur* 8, 7, 6, *quæ facta continue prodibũt* 336, *quẽ numerũ si per dimidiũ laterũ* 21 *multiplices, surget numerus* 7056 *cuius latus* 84 *quæsita trianguli* ABC *area est: tantum etiam superius, pro area invenimus, in lemmate primo, illud itaque huius quasi* [illegible] *est, & hoc illius.*

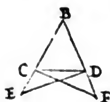
ERRATA.

Fol. 7. parag. 17. pro [illegible] lege [illegible]. f. 9. p. 20. pro 1779 l. 1776. p. 23. l. æquale. p. 24 l. [illegible] p. 25. l. Triangulũ. f. 10. p. 21. pro FF. l. FE. f. 14. p. 17. l. Additio. f. 16. p. 8 l. radix. p. 14. l. Hæc. p. 18. l. Algebra. f. 19. p. 4. l. numerorum. f. 20. p. 17. pro 19. l. 16. pro CF. l. CE f. 23. p. 23. l. triangulum. f. 29. p. 5. pro 32. l. 48. p. 13. pro [illegible] l. [illegible]. f. 30. p. 4. l. retenta. f. 32. p. 17. pro √. 8 [illegible] - √ 3 [illegible] l. √. 2 [illegible] - √ 3 [illegible]. f. 38. p. 15 proportio quæ ponitur, intelligenda cum diameter. 1. ponitur: vel si retineãtur partes diametri 100000, delendus est denominator 1000000: idẽ de f. 49. p. 16. 17. intelligendũ f. 42. p. 13. l. Quadrata. f. 49. p penult. A & D l. A & E. f. 56. prop. XXII. in diagram. pro E. 1. l. F. 1. f. 62. prop. XIII. in diagr. pro H l. A pro G. l. C. Cœtera vix alicuiꝰ mométi, lector benignus emendabit.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTORVM PRIMVS.

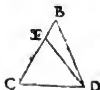
Prop. V.



Crura BC, BD quodlibet 6. basis CD 4. dantur. Anguli ergo repeñuntur B. 38. Grad. 56. Min. BCD 70. Grad. 32. Min. æqualis BDC: Et ECD 109. Grad. 28. Min.

per 3. tri-gon. pitisc. 15. prim.

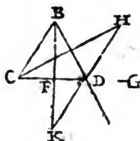
Prop. VI.



Ad C sive D angulus 70. Grad. 32. Min. CD 8. dantur. Crus quodlibet 12. erit.

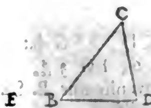
3. Trigon. Pitisci.

Prop. XVI.



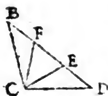
Datur triangulum BCD æquilaterum, & latus 8. Ergo & anguli, quilibet 60. Grad. BDG itaque 120. utrolibet interno maior est.

Prop. XVII.



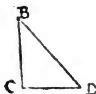
Dantur latera BC 21. CD 20. DB. 13. Ergo & anguli, D 75. Grad. 45. Min. DBC 67. Gr. 23. Min. C 36. Gr. 52. Min. Sed duo recti sunt 180. Gr. quos nec CB 104. Grad. 15. Min. nec CD 112. Grad. 37. Min. nec BD 143. Grad. 8. Min. compositi æquant. Vera ergo propositio est.

Prop. XVIII.



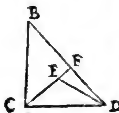
Dantur BD. 21. BC. 20. CD. 13. Ergo & anguli. Cum itaque C 75. Grad. 45. Min. maximus sit, maius ergo & latus BD subtendit: Sic D 67. Grad. 23. Min. cum minor, minus BC: & B 36. Grad. 25. Min. cum minimus, latus minimum CD, quod etiam voluit propositio.

Prop. XIX.



Si darentur soli anguli ut B 36 Grad. 25. Min. C. 75. Grad. 45. Min. D. 67. Gr. 23. Min. Via contraria inuenirentur latera, semper maiora angulis maioribus opposita, minoribus minora, minima minimis.

Prop. XXI.

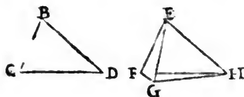


Per 47. primi.

3. Trigon. Pitisci.

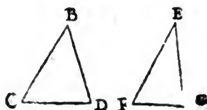
Sit BC. 16. CD. 12. BCD angulus rectus, & CE. 7. ED 8. Est ergo BD. 20. Sed latera BC. BD composita efficiunt 36. cum CE ED composita faciant tantum 15. Angulus CED invenitur 116 Gr. 35. Min. B 53. Gr. 8. Min. Illa ergo latera & angulus his lateribus & angulo maiora sunt, ut sensus est propositionis.

Prop. XXIV.



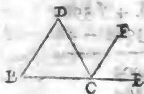
Dantur BC 4. BD. 6. B. 80. Gr. FEG 27 Gr. Dantur ergo & latera, nempe CD 6⁏ maius latere FG 3 .⁝.⁚ quod vult propositio.

Prop. XXV.



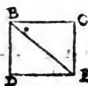
Sic si triangulorum BCD, EFG latera BC. 6. BD. 4. CD. 6⁏ FG 3 .⁝. darentur, etiam anguli invenirentur B. 80. Gr. E 27. Gr. ita inter se differe.

PROP. XXXII.



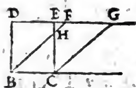
Sit BCD triangulum æquilaterum, quilibet ergo angulus 60. Grad. erit, ergo DCE externus 120. Gr. erit æqualis B & D ſimul ſumptis, ſibique oppoſitis.

PROP. XXXIV.



Sit BC 20 ⓪ æqualis DE, ſit vero BD 15 ⓪ æqualis CE. diameter BE 25 ⓪. Triangulum igitur BCE 150 ⓪ erit, & DEB 150 ⓪ quoque: quare æqualia. Et angulus DBE 53 Gr. 8. Min. ut & CED &; DEB 136 Grad. 52 Min. ut quoque CBE. 1. lem.

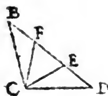
PROP. XXXV.



Sit BC. 8 ⓪ BD 10 ⓪ DF 12 ⓪. Rectangulum igitur DC 80 ⓪ erit. Cum itaque triangula EFH, DFB, æquiangula ſint, [eſt enim. HEF, BDF angulo æqualis, utpote rectus, EFH vero vtrique communis, FHE ergo FBD angulo æqualis] erit ut FD ad 32. prim.
DB ita FE ad EH: quare EH erit 3 ⓪ 3 ① 3 ② 3 ③, 4. ſex.
hæc ablata de EC, manebit HC 6 ⓪ 6 ① 6 ② 7 ③.
Triangulum igitur EFH erit 6 ⓪ 6 ① 6 ② 6 ③, & BCH 1. lem.
26 ⓪ 6 ① 6 ② 6 ③, illo ablato, hoc vero appoſito, fiet totum CD, toti CF æquale quodlibet 80 ⓪.

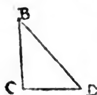
Retentis iiſdem numeris erit BF √ 244. *Si itaque diameter* BG *ducatur, ipſa erit* √ 500, *& triangulum* BFG, *triangulo* BCG *æquale erit, quodlibet dimidium parallelogrammi* CF. *Compoſita igitur duo hæc triangula, parallelogrammum* CF *conſtituent* 80, *tantum eſt &* CD *rectangulum.* 47. prim.

PROP. XVIII.



Dantur BD. 21. BC. 20. CD. 13. Ergo & anguli. Cum itaque C 75. Grad. 45. Min. maximus sit, maius ergo & latus BD subtendit: Sic D 67. Grad. 23. Min. cum minor, minus BC: & B 36. Grad. 25. Min. cum minimus, latus minimum CD, quod etiam voluit propositio.

PROP. XIX.

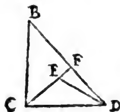


Si darentur soli anguli ut B 36 Grad. 25. Min. C. 75. Grad. 45. Min. D. 67. Gr. 23. Min. Via contraria invenirentur latera, semper maiora angulis maioribus opposita, minoribus minora, minima minimis.

PROP. XXI.

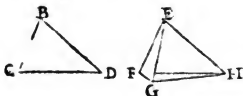
Per 47. primi.

3. Trigon. Pitisci.



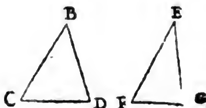
Sit BC. 16. CD. 12. BCD angulus rectus, & CE. 7. ED 8. Est ergo BD. 20. Sed latera BC. BD composita efficiunt 36. cum CE ED composita faciant tantum 15. Angulus CED invenitur 116 Gr. 35. Min. B 53. Gr. 8. Min. Illa ergo latera & angulus his lateribus & angulo maiora sunt, ut sensus est propositionis.

PROP. XXIV.



Dantur BC 4. BD. 6. B. 80. Gr. FEG 27. Gr. Dantur ergo & latera, nempe CD 6 ¦ maius latere FG 3 ¦¦. quod vult propositio.

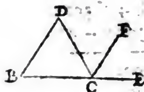
PROP. XXV.



Sic si triangulorum BCD, EFG latera BC. 6. BD. 4. CD. 6 ¦ FG 3 ¦¦. darentur, etiam anguli invenirentur B. 80. Gr. E 27. Gr. ita inter se differe.

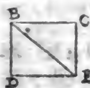
PROP.

PROP. XXXII.



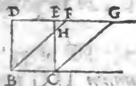
Sit BCD triangulum aquilaterum, quilibet ergo angulus 60. Grad. erit, ergo DCE externus 120. Gr. erit æqualis B & D simul sumptis, sibique oppositis.

PROP. XXXIV.



Sit BC 20 ◎ æqualis DE, sit vero BD 15 ◎ æqualis CE. diameter BE 25 ◎. Triangulum igitur BCE 150 ◎ erit, & DEB 150 ◎ quoque: quare æqualia. Et angulus DBE 53 Gr. 8. Min. ut & CED &; DEB 136 Grad. 52 Min. ut quoque CBE. 1. lem.

PROP. XXXV.



Sit BC. 8 ◎ BD 10 ◎ DF 12 ◎. Rectangulum igitur DC 80 ◎ erit. Cum itaque triangula EFH, DFB, æquiangula sint, [est enim HEF, BDF angulo æqualis, utpote rectus, EFH vero utrique communis, FHE ergo FBD angulo æqualis] erit ut FD ad DB ita FE ad EH: quare EH erit 3 ◎ 3 ① 3 ② 3 ③, hæc ablata de EC, manebit HC 6 ◎ 6 ① 6 ② 7 ③. Triangulum igitur EFH erit 6 ◎ 6 ① 6 ② 6 ③, & BCH 26 ◎ 6 ① 6 ② 6 ③, illo ablato, hoc vero apposito, fiet totum CD, toti CF æquale quodlibet 80 ◎. 32. prim. 4. sex. 1. lem.

Retentis iisdem numeris erit BF √ 244. *Si itaque diameter* BG *ducatur, ipsa erit* √ 500, *& triangulum* BFG, *triangulo* BCG *æquale erit, quodlibet dimidium parallelogrammi* CF. *Composita igitur duo hæc triangula, parallelogrammum* CF *constituent* 80, *tantum est &* CD *rectangulum.* 47. prim.

Calculus trianguli BFG.

$\sqrt{500} + \sqrt{244} + 8$

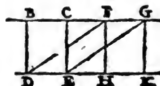
$\sqrt{125} - \sqrt{61} + 4$ | $48 + \sqrt{3904}$
$\sqrt{125} + \sqrt{61} - 4$ | $\sqrt{3904} - 48$

$+125$ | $+3904$
-77 | -2304

$48 + \sqrt{3904}$ | 16|00|

4| 0| area triang. BFG.

PROP. XXXVI.



Sit DE 2⓪8①2②8③4④ æqualis CF, sive HK; BD 3⓪7①7②1③6④ æqualis GK. Ergo DF 6⓪32449⑤ FE 4⓪71433⑤. Sed paral-
47. prim. lelogrammũ BE est 10⓪66459344⑧, æquale parallelogrammo DG [cum triangulum FDE sit
1. lem. 5⓪33229672⑧ dimidium parallelogrammi DG] & FK eidem parallelogrammo æquale est. Ergo DC, HG parallelogramma inter se æqualia sunt.

47. prim. *Sit* DE √8 BD √25;. *Ergo* DF. √57; FE √33;. *Rectangulum* DC *erit* √202;. *Et parallelogrammum* DG *tantundem. Sed huic est* HG *rectangulum æquale.*

Calculus trianguli FDE

$\sqrt{57;} + \sqrt{33;} + \sqrt{8}$

$\sqrt{14;} + \sqrt{8;} + \sqrt{2}$ | $\sqrt{114;} + 8$
$\sqrt{14;} - \sqrt{8;} + \sqrt{2}$ | $\sqrt{114;} - 8$

$+16;$ | $+114;$
$-8;$ | -64

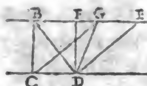
$\sqrt{114;} + 8$ | $\sqrt{50;}$ area FDE

4

$\sqrt{202;}$ DG parallel.

PROP.

PROP. XXXVII.



BC. 11 ◎ sit, æqualis FD, sit vero BF 7 ◎, & FG 2 ◎ 4 ① 4 ② 9 ③ 4 ④. 47.prim. Erit ergo BD 13 ◎ 0384 ④ CG 14 ◎ 5506 ④ & DG 11 ◎ 2684 ④ Calculus instituatur ex secundo lemmate, quodlibet triangulum erit 38 ◎ 5 ①.

Retentis iisdem numeris, excepta FG *pro qua ponatur* $\surd 6$. *Ergo* 47.prim. BD $\surd 170$ *erit*, CG. $\surd .176 + \surd 1176$, *&* DG $\surd 127$. *Singula triangula* BCD, GCD *aream recipient* $38\frac{1}{2}$. *Ergo æqualia.*

Calculus trianguli BCD.

$18 + \surd 170$

$9 + \surd 42\frac{1}{2}$
$9 - \surd 42\frac{1}{2}$

$+ 81$
$- 42\frac{1}{2}$

$38\frac{1}{2}$

$\surd 42\frac{1}{2} + 2$
$\surd 42\frac{1}{2} - 2$

$42\frac{1}{2}$
4

$38\frac{1}{2}$

Calculus trianguli GCD.

$\surd .176 + \surd 1176 + \surd 127 + 7$

$\surd .44 + \surd 73\frac{1}{2} + \surd 31\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2}$
$\surd .44 + \surd 73\frac{1}{2} - \surd 31\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2}$

$+44 + \surd 73\frac{1}{2}$
$- 44$

$\surd 1555\frac{3}{4} + \surd 73\frac{1}{2}$
$\surd 1555\frac{3}{4} - \surd 73\frac{1}{2}$

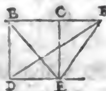
$1555\frac{3}{4}$
$73\frac{1}{2}$

$\surd 1482\frac{1}{4}$

5929
4
16
5929
7|7|
14

77/2 ($38\frac{1}{2}$ area trianguli GCD

PROP. XLI.



47. prim. Ponatur quod DE, æqualis BC ſit, 6 ◎ & DB æqualis EC 8 ◎, totum ergo rectangulum DC. 48 ◎ erit. Erit ergo BE 10 ◎: quare triangulum BDE 24 ◎ erit. Sit vero CF 4 ◎. 8 ① 2 ② 8 ③ 4 ⊕. Ergo DF 13 ◎ 4630 ⊕ erit, & EF. 9 ◎ 3441 ⊕ erit. Calculus fiat ex ſecundo lemmate, apparebit triangulum DEF æquale eſſe triangulo BDE, ut parum interſit. Sed rectangulum DC duplum eſt trianguli BDE, ergo & DEF trianguli.

47. prim. *Retentis iiſdem numeris, excepta* CF, *pro qua ponatur* $\sqrt{8} + 2$. *Ergo* DF *erit* $\sqrt{.136 + \sqrt{2048}}$ *&* EF $\sqrt{.76 + \sqrt{128}}$. *Calculus inſtituatur, exacte* 24 *reperientur pro* DEF *triangulo.*

Calculus trianguli DEF.

$\sqrt{.136} + \sqrt{2048} + \sqrt{.76} + \sqrt{128} + 6$

$\sqrt{.34} + \sqrt{128} + \sqrt{.19} + \sqrt{8} + 3$

$\sqrt{.34} + \sqrt{128} - \sqrt{.19} + \sqrt{8} + 3$

$+ 43 + \sqrt{128}$ 4 6

$- 19 + \sqrt{8}$ $\sqrt{.1224} + \sqrt{165888}$

$24 + \sqrt{72}$

$\sqrt{.1224} + \sqrt{165888} + 24 + \sqrt{8}$

$\sqrt{.1224} + \sqrt{165888} - 24 - \sqrt{8}$

$1224 + \sqrt{165888}$

$648 - \sqrt{165888}$

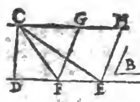
4. o

576

−2 | 4 | area trianguli DEF.

4

PROP. XLII.



Sit DE 9⓪6①5②7③9④ DC vero 5⓪6①3②3③7④ æqualis CG. Erit itaque DF 4⓪8289④ cum sit dimidia rectæ DE. Sed CF erit 7⓪4200④ 47.prim. & CE 11⓪1406④. Ablata DF de CG, reliqui quadratum cum quadrato de CD compositum, extracta radice quadrata, exhibebitur recta FG 5⓪6908④. Sed ablata CG de DE, reliqui quadratum cum quadrato de CD compositum, radice extracta quadrata, exhibebitur recta GE 6⓪9233④. Si iam Calculus instituatur, apparebit quod CDE, 27⓪20457394⑧ duplum sit trianguli CDF 13⓪602286965⑨, æquale vero parallelogrammo, FH.

Sit DE $\sqrt{.}\,48 + \sqrt{2050}$, DC *vero* $\sqrt{.}\,16\frac{1}{3} + \sqrt{237\frac{3809}{10368}}$ *æqualis* CG. *Ergo* DF *erit* $\sqrt{.}\,12 + \sqrt{128\frac{1}{8}}$, CF $\sqrt{.}\,28\frac{1}{3} + \sqrt{714\frac{2873}{10368}}$ 47. prim. *&* CE $\sqrt{.}\,64\frac{1}{3} + \sqrt{3682\frac{5349}{10368}}$. *Invenietur quoque pro* FG, [*si operatio ex superius præscripta norma instituatur*] $\sqrt{.}\,16\frac{2}{3} + \sqrt{247\frac{401}{2592}}$ & GE $\sqrt{.}\,24\frac{2}{3} + \sqrt{541\frac{593}{2592}}$. *Eadem veritas in his numeris conspicietur, quæ in priorib, & certior quam in illis.*

Calculus trianguli CDE ex primo lemmate.

$16\frac{1}{3} + \sqrt{237\frac{3809}{10368}}$ 49 $\sqrt{\frac{1025}{10368}}$
$12 + \sqrt{128\frac{1}{8}}$ 36

196
$174\frac{1017}{2592}$

$\sqrt{.}\,370\frac{113}{288} + \sqrt{136723\frac{11}{18}}$ area trianguli CDE vel $14 + \sqrt{174\frac{113}{288}}$ vera area, cum radix quadrata ex $370\frac{113}{288} + \sqrt{136723\frac{11}{18}}$ extrahitur.

Calculus

Calculus trianguli CDF ex ſecundi lemmatis ſententia.

$\surd.28\frac{1}{3} + \surd 714\frac{2871}{10368} + \surd.16\frac{1}{3} + \surd 237\frac{3809}{10368} + \surd.12 + \surd 128\frac{1}{8}$

$\surd.7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888} + \surd.4\frac{1}{12} + \surd 14\frac{138593}{165888} + \surd.12 + \surd 8\frac{1}{128}$

$\surd.7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888} - \surd.4\frac{1}{12} + \surd 14\frac{138593}{165888} + \surd.12 + \surd 8\frac{1}{128}$

$7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888}$ $\frac{85}{36}$ $\surd.7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888}$

$3 + \surd 8\frac{1}{128}$ $\surd.3 + \surd 8\frac{1}{128}$

$+10\frac{1}{12} + \surd 90\frac{77101}{165888}$ 121 $\surd.40\frac{26100}{165888} + \surd 1607\frac{30484}{165888}$

$-4\frac{1}{12} + \surd 14\frac{138593}{165888}$ 49   4   16

$6 + \surd 32\frac{5184}{165888}$ $\surd.160\frac{104400}{165888} + \surd 25713\frac{161856}{165888}$

$\surd.160\frac{104400}{165888} + \surd 25713\frac{161856}{165888} + 6 + \surd 32\frac{5184}{165888}$

$\surd.160\frac{104400}{165888} + \surd 25713\frac{161856}{165888} - 6 - \surd 32\frac{5184}{165888}$

$160\frac{104400}{165888} + \surd 25713\frac{161856}{165888}$ 2040

$-68\frac{5184}{165888} - \surd 4612\frac{82944}{165888}$ 864

$\surd.92\frac{99216}{165888} + \surd 8545\frac{65}{128}$ area trianguli CDF, ſive radice extracta, vera area erit; $7 + \surd 43\frac{6101}{10368}$.

Calculus trianguli CFE.

$\surd.64\frac{1}{3} + \surd 3682\frac{5349}{10368} + \surd.28\frac{1}{3} + \surd 714\frac{2871}{10368} + \surd.12 + \surd 128\frac{1}{8}$

$\surd.16\frac{1}{12} + \surd 230\frac{85985}{165888} + \surd.7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888} + \surd.3 + \surd 8\frac{1}{128}$

$\surd.16\frac{1}{12} + \surd 230\frac{85985}{165888} - \surd.7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888} + \surd.3 + \surd 8\frac{1}{128}$

$16\frac{1}{12} + \surd 230\frac{85985}{165888}$ $\frac{193}{36}$ $\surd.16\frac{1}{12} + \surd 230\frac{85985}{165888}$

$3 + \surd 8\frac{1}{128}$ $\surd.12 + \surd 128\frac{1}{1288}$

$+19\frac{1}{12} + \surd 324\frac{4333}{165888}$ 229 $\surd.364\frac{110952}{165888} + \surd 132570\frac{37400}{165888}$

$-7\frac{1}{12} + \surd 44\frac{106553}{165888}$ 85

$12 + \surd 128\frac{20736}{165888}$ 144

$\sqrt{.}\,364\frac{119952}{165888} + \sqrt{132570\frac{37440}{165888}} + 12 + \sqrt{128\frac{20736}{165888}}$

$\sqrt{.}\,364\frac{119952}{165888} + \sqrt{132570\frac{37440}{165888}} - 12 - \sqrt{128\frac{20736}{165888}}$

$364\frac{119952}{165888} + \sqrt{132570\frac{37440}{165888}}$ 4632

$272\frac{20736}{165888} + \sqrt{73800}$ 3456

$\sqrt{.}\,92\frac{99216}{165888} + \sqrt{8545\frac{65}{288}}$ area trianguli CFE ſive quod idem eſt $7 + \sqrt{43\frac{6101}{10368}}$ Triangula igitur CDF, & CFE compoſita, triangulum CDE conſtituunt, $14 + \sqrt{174\frac{115}{288}}$.

Calculus trianguli GFE.

$\sqrt{.}\,24\frac{1}{3} + \sqrt{541\frac{3811}{10368}} + \sqrt{.}\,16\frac{1}{3} + \sqrt{247\frac{1604}{10368}} + \sqrt{.}\,12 + \sqrt{128\frac{1}{8}}$

$\sqrt{.}\,6\frac{1}{6} + \sqrt{32\frac{24281}{41472}} + \sqrt{.}\,4\frac{1}{6} + \sqrt{15\frac{44750}{165888}} + \sqrt{.}\,3 + \sqrt{8\frac{1}{128}}$

$\sqrt{.}\,6\frac{1}{6} + \sqrt{32\frac{24281}{41472}} - \sqrt{.}\,4\frac{1}{6} + \sqrt{15\frac{44750}{165888}} + \sqrt{.}\,3 + \sqrt{8\frac{1}{128}}$

$6\frac{1}{6} + \sqrt{32\frac{24281}{41472}}$ 74 $\sqrt{.}\,6\frac{1}{6} + \sqrt{32\frac{26281}{41472}}$

$3 + \sqrt{8\frac{1}{128}}$ 36 $\sqrt{.}\,12 + \sqrt{128\frac{1}{8}}$

$9\frac{1}{6} + \sqrt{74\frac{26788}{165888}}$ 110 $\sqrt{.}\,139\frac{130680}{165888} + \sqrt{19489\frac{19168}{165888}}$

$-4\frac{1}{6} + \sqrt{15\frac{44750}{165888}}$ 50

$5 + \sqrt{22\frac{40464}{165888}}$

$\sqrt{.}\,139\frac{139680}{165888} + \sqrt{19489\frac{39180}{165888}} + 5 + \sqrt{22\frac{40163}{165888}}$

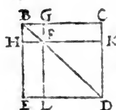
$\sqrt{.}\,139\frac{139680}{165888} + \sqrt{19489\frac{39180}{165888}} - 5 - \sqrt{22\frac{40464}{165888}}$

$139\frac{139680}{165888} + \sqrt{19489\frac{39180}{165888}}$ 1779

$47\frac{40464}{165888} - \sqrt{2224\frac{65088}{165888}}$ 600

$\sqrt{.}\,92\frac{99216}{165888} + \sqrt{8545\frac{65}{288}}$ *area trianguli* GFE *ſive* $7 + \sqrt{43\frac{6101}{10368}}$. *Sed triangulum* GHF *huic æqualo eſt. Totum igitur parallelogrammum* FH *erit* $14 + \sqrt{174\frac{115}{288}}$. *Tanta etiam deprehenſa eſt capacitas trianguli* DCE. *Triangulus igitur* CDE *& parallelogrammum* FH *æqualia ſunt.*

PROP. XLIII.



Sit BC 6 ⓪ 9 ① 2 ② 8 ③ 2 ④, æqualis BE, BG vero, 2 ⓪. Ergo BD 9 ⓪ 7979 ④
47. prim. erit, BF 2 ⓪ 8284 ④ FD, 6 ⓪ 9695 ④; GC, 4 ⓪ 9282 ④. BCD ergo triangulum, erit 23 ⓪ 99997762 ⑧ à quo triangulum FKD 12 ⓪ 13372122 ⑧ ablatum, relinquetur trapezium BCKF 11 ⓪ 8662564 ⑦ à quo viciſſim triangulum BGF 2 ⓪ ſubductum, complementum EF 9 ⓪ 8662564 ⑦ relinquetur. Sed triangulum BED, triangulo BCD æquale eſt, ab hoc ablatum FLD triangulum, FKD æquale, trapezium BFLE, manebit, trapezio BFKC æquale; & viciſſim dempto triangulo, BHF, triangulo BGF æquali, remanebit complementum FE complemento FC æquale.

Ponatur pro BC $\sqrt{48}$, *pro* BG 2, *ergo* GC $\sqrt{48} - 2$ *erit*, *&* BD $\sqrt{96}$, FD, $\sqrt{.104 - \sqrt{3072}}$ *ſive* $\sqrt{96} - \sqrt{8}$ *erit*, *Triangulis* FKD, FLD, $52 - \sqrt{768}$ *ſimul à triangulis*, BCD, BED 48 *ablatis*, *relinquentur trapezia* BK, BL, $\sqrt{768} - 4$, *ab his denuo triangulis* BGF, BHF 4 *ſubductis*, *complementa reſtabunt*, $\sqrt{768} - 8$ *quodlibet*, FC, FE $\sqrt{192} - 4$.

Calcul. triang. BGF.	Calculus trianguli BCD.	
2	$\sqrt{48}$	
2	$\sqrt{48}$	$\sqrt{24}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{24}$
$4 + \sqrt{8}$	$\sqrt{192} + \sqrt{96}$	24 area.
$2 + \sqrt{2}$	$\sqrt{48} + \sqrt{24}$	
$2 - \sqrt{2}$	$\sqrt{48} - \sqrt{24}$	
4	48	
2	$- 24$	
2 area.	24 area.	

Calculus

Calculus trianguli FKD.

$\sqrt{48} - 2$
$\sqrt{48} - 2 + \sqrt{96} - \sqrt{8}$

$\sqrt{192} - 4 + \sqrt{96} - \sqrt{8}$

$\sqrt{48} - 2 + \sqrt{24} - \sqrt{2}$
$\sqrt{48} - 2 - \sqrt{24} - \sqrt{2}$

	24
48	2
4	
	$26 - \sqrt{192}$
$+ 52 - \sqrt{768}$	2
$- 26 - \sqrt{192}$	1

$26 - \sqrt{192}$ area triang.

$\sqrt{24} - \sqrt{2}$
$\sqrt{24} - \sqrt{2}$

24
2

$26 - \sqrt{192}$ area trianguli FKD.

PROP. XLVII.

Ponatur quod BC 36 ⓪ sit, CD 15 ⓪; BD ergo 39 ⓪. Quia duorum triangulorum BCD, CDN anguli æquales sunt [est enim BCD angulus rectus, CND angulo æqualis, CDB vero vtrique communis, ergo DCN, CBD 32. prim.
anguli æquales inter se] latera quæ circum æquales angulos 4. sex.
proportionalia erunt: quare ut BD ad DC, ita CD ad DN, quæ erit 5 ⓪ 76923 ⑤: hæc de BD ablata, relinquetur BN 33 ⓪ 23077 ⑤; vel ut BD ad BC ita CB ad BN, invenietur tandundem pro BN. Ducta DN in DL, quæ BD æqualis est, prodibit NL rectangulum 224 ⓪ 17. sex.
99997 ⑤ ita quadrato DG 225 ⓪ æquale, ut vicies quinquies millesima parte non differat, à vero; & BN in BK ducta, prodibit NK 1296 ⓪ 00001 ⑤ rectangulum æquale BF

1296 ◎ quadrato. Componantur rectangula NL, NK. Exacte 1521 ◎ prodibunt. Tantum inuenietur pro CE, CH quadratis si componantur.

Suppositis iisdem numeris, pro BCD *trianguli lateribus. Composita* FC, CD, *tota* FD *erit* 52, *cuius quadratum cum quadrato de* FE *compositum radice extracta habebitur* DE √ 3897 *quæ æqualis ostensa est* CK; *eadem ratione* BH √ 2826 *erit, æqualis* CL *ut ostendimus. Calculo facto, erit* BED *triangulum* BKC 648 *triangulo æquale, quodlibet subduplum sui quadrati, sui parallelogrammi. Quadratum ergo* CE 1296 *parallelogrammo* NK *æquale erit. Idem fit in triangulis* BDH, CDL.

Calculus trianguli BDE.

BD 39
BE 36
ED √ 3897

75 + √ 3897
37½ + √ 974¼
37½ − √ 974¼

1406¼
974¼

432

√ 974¼ + 1½
√ 974¼ − 1½

974¼
2¼

972
432

41 99 04

6 | 4 | 8 | area BDE

Calculus trianguli BDH.

BD 39
DH 15
BH √ 2826

54 + √ 2826
27 + √ 706½
27 − √ 706½

729
− 706½

22½

√ 706½ + 12
√ 706½ − 12

706½
− 144

562½
22½

1256¼

5 06 25

2 | 2 | 5 | 225/2 (112½ area.

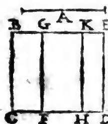
FINIS LIBRI PRIMI.

EVCLI-

115

EVCLIDIS ELEMENTORVM SECVNDVS.

Prop. I.

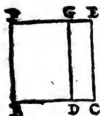


Duobus quibuſcunque numeris propoſitis ut 8 & 10, poſterior in partes quaſcunque, ut hic 3, 5 & 2 dividatur: dico 80 numerum ex 8 in 10, productum, tribus numeris, 24, 40, 16, qui ex ductu 8 in 3 & 5 & 2 naſcuntur, æqualem eſſe, ut perſpicuum eſt.

Vſitatum hoc in multiplicatione, arithmeticis compendium eſt, frequentiſſimum in regula proportionum, & Divina Algebra.

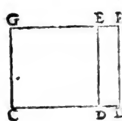
indiviſus.	diviſus.	alias ſic.
74	37	74
		37
1480	20	518
740	10	222
370	5	2738
148	2	
2738	*iidem numeri.*	

Prop. II.



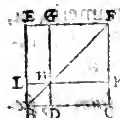
Numerus quicunque ut 10 in duas partes quaſcunq; ſit diviſus ut 6 & 4. aio numeros 60 & 40 qui ex 10 in 6 & 4 multiplicatione oriuntur æquales eſſe 100, quadrato ipſius numeri 10 ut apparet. Idem eveniet ſi in plures partes ſecetur, ut 4, 3, 2, 1; erunt numeri 40, 30, 20, 10 æquales 100 quadrato, ut liquet.

PROP. III.



Divisus sit quicunque numerus, ut 10 in partes quascunque duas, ut 8 & 2: dico numerum 80 ex 10 in 8 productum, æqualem esse 16, qui ex 8 in 2 producitur, una cum 64 quadrato prioris partis 8, ut perspicuum est. Pari ratione erit numerus 20, natus ex 10 in 2 æqualis numero 16 ex 2 in 8 procreato, simul cum, 4 quadrato prædicti numeri 2: quod res ipsa indicat.

PROP. IV.



Sumatur numerus 10, divisus utcunque in 7 & 3. Manifestum est 100 quadratum totius, æquari 49 & 9 quadratis partium 7 & 3 una cum 21 numero, qui ex 7 in 3 ductu oritur, bis sumpto. Nam 49, 9, 21, 21 compositi, efficiunt 100: tantum est quadratum 10 numeri.

Ex hoc theoremate surdorum Addito *defluxit, cuius hic est* Canon.

Producti quadratorum lateri bis sumpto, summà quadratorum appositâ, collecti Radix quadrata, summam exhibet dati surdi. *Addendi surdi dentur ut* √. √ 420 − 20 *binomium cum* √. √ 4784 $\frac{1}{16}$ − 63 $\frac{3}{4}$ *binomio, Summâ erit* √. √ 321 $\frac{9}{16}$ − 8 $\frac{3}{4}$: *praxis sequitur.*

Quadrati	√ 4784 $\frac{1}{16}$ − 63 $\frac{3}{4}$	4784 $\frac{1}{16}$	4784 $\frac{1}{16}$
sunt.	√ 420 − 20	420	420
Summa.	√ 8039 $\frac{1}{16}$ − 83 $\frac{3}{4}$	5204 $\frac{1}{16}$	2009306 $\frac{1}{4}$
		2835	20
		√ 8039 $\frac{1}{16}$	41985
			5037225
			2 | 8 | 3 | 5
			4 6 6
			1 6
			5

Eadem

Eadem summa inventa per compendium.

105
$6\frac{3}{4}$
2
$8\frac{3}{4}$
$76\frac{9}{16}$
105
$\surd 8039\frac{1}{16}$

$\surd 4784\frac{1}{16} - 63\frac{3}{4}$
$\surd 420 - 20$
$\surd 8039\frac{1}{16} - 83\frac{3}{4}$

$4784\frac{1}{16}$
400
1913625
$1706906\frac{1}{4}$
$3620531\frac{1}{4}$
3614625
$\surd 7235156\frac{1}{4}$

$\surd 4784\frac{1}{16} - 63\frac{3}{4}$
$\surd 420 - 20$
$\surd 2009306\frac{1}{4}$
$1417\frac{1}{2}$
1275
$2692\frac{1}{2} - \surd$

$4064\frac{1}{16}$
420
$1706906\frac{1}{4}$
1913625
$3266378472656\frac{1}{4}$
4
13065513890625
3|6|1|4|6|2|5|

$\surd .2692\frac{1}{2} - \surd 7235156\frac{1}{4}$

Eadem multiplicatio compendiosior.

105
$6\frac{3}{4}$
2
$13\frac{1}{2}$
105
$1417\frac{1}{2}$

$\surd 4784\frac{1}{16} - 63\frac{3}{4}$
$\surd 420 - 20$
$1417\frac{1}{2}$
1275
$2692\frac{1}{2} - \surd$

$63\frac{3}{4}$
2
$127\frac{1}{2}$

$6\frac{3}{4}$
20
135
$127\frac{1}{2}$
$262\frac{1}{2}$
$262\frac{1}{2}$
$68906\frac{1}{4}$
105
$\surd 7235156\frac{1}{4}$

$\surd .2692\frac{1}{2} - \surd 7235156\frac{1}{4}$
4 16

$\surd .1077$

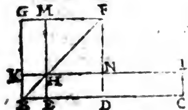
√. 10770 — √ 115762500 **Ex hoc numero radix extrahatur quadrata.**

10770	
115992900	480
115762500	10780
230400	11250 10770
	5625 5625
4|8|0|	7|5| — √ 5154 radex binomia.
8 $\frac{3}{4}$	
7	√ 8039 $\frac{1}{16}$ — 83 $\frac{3}{4}$
	75 — √ 5145 7
1 $\frac{3}{4}$	
3 $\frac{1}{16}$	√ 321 $\frac{9}{16}$ — 8 $\frac{3}{4}$
305	

√ 321 $\frac{9}{16}$ Hoc eſt √. √ 321 $\frac{9}{16}$ — 8 $\frac{3}{4}$ dati ſurdi quæſita ſumma.

Algebraicæ æquationes per huius libri theoremata reſoluuntur; ſed cum id huius loci proprie non ſit, earum omittendam analyſin duximus. Scripſit doctiſſime de hoc clariſſimus F. Vieta, vir ad miraculum doctus; Prodibunt etiam brevi Ludolphi noſtri doctiſſima de Algebia opera, qui ſe Herculem verum in hoc argumento oſtendit. Doctis his libenter cedo: quæ tamen de ſurdis addidimus, jure quodam hunc locum exigere videbantur; non ergo inviti hæc poſuimus, cum eorum tam frequens hoc opere noſtro uſus occurrat.

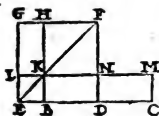
PROP. V.



Quicunque numerus ut 10 æqualiter in 5 & 5 ſectus ſit, & inæqualiter in 7 & 3, ita ut intermedius ſectionis numerus 2 ſit, quo dimidius minorem partem ſuperat. Manifeſtum eſt 21 numerum, 7 in 3 ductu ortum cum 4 quadrato intermedij 2, æqualem eſſe 25 quadrato dimidij numeri 5.

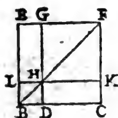
PROP.

PROP. VI.



Æquibisecto 10 numero in 5 & 5 addatur quicumque numerus ut 2. Evidens est 24 qui nascitur extoto numero composito 12 in appositum 2 vna cum 25 quadrato dimidij, æqualem esse 49 huius numeri 7 qui ex dimidio 5 & adiecto conflatur.

PROP. VII.



Vtcunque quocunque numero ut 10 diviso in 6 & 4. Ergo 100 quadratus totius, & 36 quadratus partis, æquales sunt numero 120, qui bis fit ex toto 10 in partem 6, una cum 16 quadrato alterius partis 4, ut liquet. Sic & 100 quadratus numerus totius 10, & 16 quadratus partis 4, æquantur numero 80, qui bis ex toto 10 in partem 4 cum 36 quadrato alterius partis 6, fit.

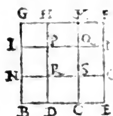
Ex hoc Theoremate Surdorum Subductio *manavit, cuius hic est* Canon.

Quadratorum summæ, producti quadratorum latere bis detracto, reliqui latus satisfacit optato. *Sit* $\sqrt{.}\sqrt{420}-20$ *binomium à binomio* $\sqrt{.}\sqrt{321\frac{9}{16}}-8\frac{3}{4}$ *auferendum, relinquetur* $\sqrt{.}\sqrt{1476\frac{9}{16}}-28\frac{3}{4}-\sqrt{.}2170-\sqrt{4630500}$ *vel, quod vere cum canone proposito convenit,* $\sqrt{.}\sqrt{4784\frac{1}{16}}-63\frac{3}{4}$: *praxis sequitur.*

105	$1\frac{3}{4}$	$\sqrt{321\frac{9}{16}}-8\frac{3}{4}$	$1476\frac{9}{16}$	$6\frac{3}{4}$	$\sqrt{4784\frac{1}{16}}-63\frac{3}{4}$
	2	$\sqrt{420}-20$			
				$45\frac{9}{16}$	$\sqrt{.}\sqrt{4784\frac{1}{16}}-63\frac{3}{4}$
	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{3}{4}\sqrt{1476\frac{9}{16}}-28\frac{3}{4}$		105	Reliquum quæsitum.
	$14\frac{1}{16}$	3 [illegible] 35 = $\sqrt{9453}$		$\sqrt{4784\frac{1}{16}}$	
	105				

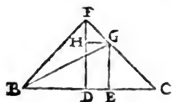
$1\frac{3}{4}$	$\sqrt{321\frac{9}{16}} - 8\frac{1}{4}$	$\sqrt{.2170 - \sqrt{4630500}}$	Extrahitur
2	$\sqrt{420} - 20$	2170	radix bi-
		4708900	uomia.
		4630500	
$3\frac{1}{4}$	$367\frac{1}{2}$	78400	
105	175	280	
$367\frac{1}{2}$	$\sqrt{.542\frac{1}{2}} - \sqrt{289406\frac{1}{4}}$	2170	
	4	2450	
		1225	
		$3\vert5\vert - \sqrt{945}$	

Prop. VIII.



Numero quocunque, ut 10 utcunque secto, ut in 6 & 4, manifestum est quod numerus 240, qui quater ex toto 10 in partem 6 fit, cum 16 quadrato partis alterius 4, id est 256 numerus, æqualis sit numero quadrato huius numeri, qui ex dato numero 10 & parte dicta componitur. Eodem modo numerus 160, qui fit quater ex 10 toto in partem 4, cum 36 quadrato alterius partis 6, hoc est numerus 196, æqualis est quadrato, huius numeri 14, qui componitur ex 10 & 4, ut liquet.

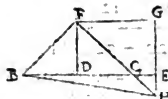
Prop. IX.



Secto rursus 10 numero æqualiter in 5 & 5 & inæqualiter in 7 & 3, ut 2 numerus, intermedia sectio sit. Quadrati ergo numeri 49 & 9 partium 7 & 3 inæqualium, dupli sunt quadratorum 25 & 4, dimidij numeri 5, & numeri 2 inter duas sectiones, ut apparet.

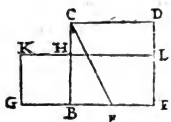
Prop.

PROP. X.



Numerus 10 æquibisecetur in 5 & 5, cui quicunque apponatur numerus 3, ut compositus totus 13 sit. Quadrati igitur numeri 169 & 9, horum numerium 13 & 3, dupli sunt quadratorum numerorum, 25, 64 qui ex his numeris 5 & 8 gignuntur, ut evidens est.

PROP. XI.



Sit BC. 12 ⓪ Ergo FB 6 ⓪ erit cum dimidium sit de BC, quare FC, æqualis FG, 13 ⓪ 4164 ④ erit, à qua FB dempta, relinquetur BG 7 ⓪ 4164 ④. 47. primi. Ablata vero hæc BG de CB, relinquetur CH 4 ⓪ 5836 ④: quæ in DC ducta, prodibit rectangulum, HD 55 ⓪ 0032 ④: ducta vero HG in seipsam, prodibit quadratum HG 55 ⓪ 00298896 ⑧. Ducta vero EG quæ est 19 ⓪ 4164 ④ in GK, prodibit rectangulum GL 143 ⓪ 99978896 ⑧ æquale quadrato BD, 144 proxime, ut parum inter sit. 47. primi.

Retento numero lateris BC, FC *erit* √ 180. *Quare* BG √ 180 − 6 *erit: quæ ablata de* BC *relinquetur pro* HC 18 − √ 180. *Composita* CH, BH, *invenientur pro* CB 12. *Ductà quoque* CH *in* DC *invenietur parallelogrammum* HD *æquale quadrato* HG, *quod erit* 216 − √ 25920, *ductà* BG *in seipsam. Similiter totum rectangulum* LG, *æquale quadrato* DB *invenietur, ducta* EG *in* GK.

18 − √ 180
√ 180 − 6
12 BC.

18 − √ 180
12 144
36 720
18 72
18
216 − √ 25920 HD

√ 180 − 6
√ 180 − 6
180
36
216 − √ 25920 HG.

12
144
180
11520
144
25920

$\sqrt{180} + 6$	$\sqrt{180} - 6$
$\sqrt{180} - 6$	144 12
180	$\sqrt{25920} - 72$ HE
36	$216 - \sqrt{25920}$ HD
144 GL	144 DB.

Prop. XII.

Ex hoc Theoremate facilis protractæ, perpendicularem excipientis, inuentio est, etiam ipsius perpendicularis, lateribus omnibus trianguli cognitis. Breviorum dati trianguli laterum quadratis, è longioris lateris quadrato ablatis, reliqui dimidium per alterutrum laterum breviorum dividatur, quotus protractam inter perpendicularem & obtusum angulum, exhibet. *Hoc est, si cupis* CD *protractam, divide per* CD; *si* BC *extensam velis, divide per* BC, *occurret* CE.

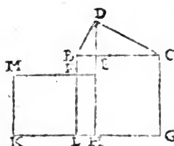
Sit BD. 40. CD. 32, BC. 19. *Ergo* CF 10 *erit.*

16	32	40
16	32	40
256	1024	1600
	256	1280
	1280	320
		160
		16 (10 CE

Evidens ergo est, quadrato lateris BD 1600 *æqualia esse quadrata laterum*, CD, BC, *nimirum* 1024, 256, *una cum rectangulo bis sub* BC, CE *comprehenso, id est* 160, 160. *Hæc enim conficiunt summam quoque* 1600 *ut vult propositio. Non Ergo difficilis*

ficilis erit perpendicularis iventio, ablato enim quadrato de CE *à* 47. primi. *quadrato de* CD, *perpendicularis* DE *erit* √924.

PROP. XIII.



Inter perpendicularem & angulum acutum assumpta linea, ex hoc quoque Theoremate, facilis est inventio, ut & ipsius perpendicularis. Laterum angulum acutum comprehendentium quadratis, lateris angulum acutum subtendentis ablatum quadratum, reliqui dimidio, per latus perpendicularem excipiens diuiso, quotus lineam sub perpendiculari prope acutum angulum exhibet.

Sit BC 9 DC, √52 BD 5, *ergo* EC 6 *erit.*

5	52
5	81
25	133
	25
	108
	54 (6 EC.
	9

Quadratum ergo lateris BD 25, *una cum numero qui bis fit ex* BC *in* EC 54, 54, *conficit numerum* 133 *æqualem duobus simul quadratis laterum* DC, BC 52, 81, &c.

Dempto quadrato rectæ EC 36 *à quadrato recte* DC 52, *relinquetur perpendicularis, radice extracta,* DE 4.

Prop. XIV.

Dato rectilineo, æquale quadratum constituere.

37. primi.

Datur rectilineum A B C D E F G H quod ordinatũ Octangulum est, in quadratum ei æquale redigendum, ita ut seruet altitudinem V X, idque commodioris in numeris ostensionis causa. Ducantur V F, V G, V H rectæ, & vicissim ex opposito latere V C, V B, V A. Puncto E agatur E K parallela V F, excipiens G F protractam in K puncto, ducaturque V K. Erit itaque V K F triangulum, V E F triangulo æquale, cum eadem basi V F insistat, & inter easdem sit parallelas. Idem intelligatur factum esse ex opposito latere. Erit itaque A B I V K G H Septangulum, octangulo dato æquale. Rursus K puncto, agatur rectæ V G parallela K M, extensam H G in M puncto excipiens, ducaturque V M recta.

Trian-

120

Triangula itaque VMG & VKG æqualia erunt, quod in eadem VG basi; & inter easdem simul parallelas subsistant. Idem si in opposito latere fiat, erit ALVMH Quinquangulum octangulo dato æquale. Postremo rectæ VH ducatur MO parallela, cum AH excurrente in O coiens, connexis VO punctis, quod & in opposito latere factum puta. Triangulum itaque NVO, octangulo ABCDEFGH dato æquale est. Cœtera nunc ad sensum propositionis perficiantur qui in commentario lineali satis est planus. Quadratum ergo TS octangulo est æquale.

In clarissimi Ludolphi *lectionibus publicis, prinsquam de* Machometo Bagdedino, *quem* F. Comandinus *&* I. Dee *communi opera ediderunt, quicquam nobis constaret, hanc metamorphosin primum* Lugduni *vidimus. Inventi itaque summa utilitate adducti, hanc tuo lector commodo, ei pagellam dandam duximus.*

Dantur AB latus octanguli 76536 ⑤ & VX perpendicularis 1 ⓪ 84775 ⑤ quæ basin AH æquibisecare intelligatur in X. Nota ergo erit VE 38268 ⑤, utpote rectæ DE dimidia. Inventionis linearum omnium modum, ob facilitatem subticebimus, eas saltem ut notas apponemus. VF 1 ⓪ 07072 ⑤ sive VC, & sic deinceps semper in opposito figuræ latere opposita linea intelligatur. KF. 22417 ⑤ VK 97675 ⑤ VKF 10355 ⑤ triangulam VEF triangulo æquale. VG. 1 ⓪ 6002 ④ KG. 98953 ⑤ GM. 57966 ⑤ VM. 1 ⓪ 60715 ⑤ VGM triangulum, VGK triangulo 582106 ⑥ æquale. VH 1 ⓪ 88796 ⑤ HM 1 ⓪ 34502 ⑤ VO 2 ⓪ 39940 ⑤ HO 1 ⓪ 14805 ⑤ VMH, VOH triangula æqualia, quodlibet. 1 ⓪ 06066 ⑤. Est autem VAH triangulum, 7071 ④, & VAN triangulum VHO triangulo æquale. Composita hæc tria triangula, aream constituent octagoni 2 ⓪ 82842 ⑤. Sed cum HO sit NA æqualis, & intermedia AH nota est, utpote latus ipsum octanguli, tres hæ rectæ compositæ, rectam NO 3 ⓪ 06146 ⑤ constituent; huic apposita OR quæ rectæ VX dimidium est tota NR 3 ⓪ 98533 ⑤ erit; cuius dimidium ZR 1 ⓪

99266

99266 ⑤ est. Ab hac ablata OR, relinquetur ZO 1 ⓪ 06879 ⑤, cuius quadratum si à quadrato de ZT quæ ZR æqualis est, auferatur, relinquetur, quadratum rectæ TO 2 ⓪ 82842 ⑤. Ipsa ergo TO erit 1 ⓪ 68179 ⑤ vero proxima.

Latus Octanguli in surdis, est √.2 − √2, *perpendiculum* VX. √.2 + √2. VE. √.$\frac{1}{2}$ − √$\frac{1}{8}$ VY √.$\frac{1}{2}$ + √$\frac{1}{8}$ VF. √.1$\frac{1}{2}$ − √$\frac{1}{8}$ KF. √.5 − √24$\frac{1}{2}$ VK. √.10$\frac{1}{2}$ − √91$\frac{1}{8}$ VKF. √.$\frac{1}{16}$ − √$\frac{1}{32}$ sive √$\frac{1}{8}$ − $\frac{1}{4}$ VG. √.1$\frac{1}{2}$ + √1$\frac{1}{8}$ KG. √.13 − √144$\frac{1}{2}$ GM. √.146 − √21218 VM. √.158$\frac{1}{2}$ − √24310 $\frac{1681}{13448}$ VGM. √.$\frac{9}{16}$ − √$\frac{1}{8}$ *sive* √$\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{4}$ VH. √.2$\frac{1}{2}$ + √1$\frac{1}{8}$ MH. √.180 − √31752 VO. √.10 − √18 HO. √.4$\frac{1}{2}$ − √8 VMH. √1$\frac{1}{8}$ NVO. √8 NO. √.32 − √512 NR. √.32$\frac{1}{2}$ − √276$\frac{1}{8}$ ZR. √.8$\frac{1}{2}$ − √17 $\frac{33}{128}$ ZO. √.8$\frac{1}{2}$ − √48 $\frac{27}{128}$ OT. √√8.

Hæc est omnium linearum quæ in hoc Schemate occurrunt longitudo, sed si quis experiri vult an verè Trigoni NOV *inventa area, Octagoni areæ respondeat, ita operationem instituat.*

VX. √.$\frac{1}{2}$ + √$\frac{1}{8}$
XH. √.$\frac{1}{2}$ − √$\frac{1}{8}$
―――――――
√$\frac{1}{8}$ area AYH trianguli.

Sed cum 8 talia triangula totam octanguli aream constituant, octies sumpto hoc triangulo [hoc est 64] habebitur totius octanguli ABCDEFGH area √8.

Calculus trianguli NVO ex lemmate secundo.

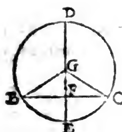
√.32 − √512 + √.10 − √18 + √.10 − √18
―――――――――――――――
√.8 − √32 + √.2$\frac{1}{2}$ − √1$\frac{1}{8}$ + √.2$\frac{1}{2}$ − √1$\frac{1}{8}$
√.8 − √32 − √.2$\frac{1}{2}$ − √1$\frac{1}{8}$ + √.2$\frac{1}{2}$ − √1$\frac{1}{8}$
―――――――――――――――
+ 8 − √32
―――――――――――――――
√.104 − √8192 + 8 − √32
√.104 − √8192 − 8 − √32
―――――――――――
104 − √8192
− 96 − √8192
―――――――――――
√8 Area NVO trianguli.

−64
32
――
96 − √8196

16
――
256
32
――
516
768
――
√8196

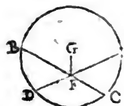
EUCLIDIS ELEMENTORUM TERTIUS.

PROP. III.



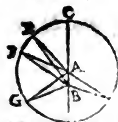
Sit BC, $1 \frac{90211}{100000}$ huius dimidium $\frac{95105}{100000}$ in *Tabulis Sinuum* invenictur subtendi 72 Gradibus. Sunt ergo 144 Grad. BGC anguli mensura, cum FGC angulus sit FGB angulo æqualis. Ergo angulorum GBC, GCB mensura 36 Grad. erunt; qui cum inter se sint æquales, quilibet eorum 18 Grad erit Sed GBF, FGB anguli compositi 90 Grad. constituunt; GFB ergo angulus 90 quoque Grad. erit, quare & rectus. 9. Primi. 32. Primi.

PROP. IV.



Sit BC $\sqrt{2}$ *æquibisecta in* F, *ergo* FG *erit* $\sqrt{\frac{1}{2}}$. *Sit* DE $\sqrt{3}$. *Ergo ex* G *puncto in medietatem* [*quam* H *vocemus*] *recta* DE *cadens, erit* $\frac{1}{2}$: FH *itaque etiam* $\frac{1}{2}$ *erit: quare* FE $\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$ DF *vero* $\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$ *est. Potestate harum resoluta, invenitur* BC, $1 \frac{41421}{100000}$ BF $\frac{70711}{100000}$ & DE $1 \frac{73205}{100000}$ FE $1 \frac{36603}{100000}$ DF $\frac{36603}{100000}$, *cum alias si falsa esset propositio, foret* DF *sive* FE $\frac{86603}{100000}$. 47. Primi. & 3. Tertij.

PROP. VII.

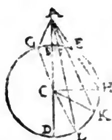


Circuli CEFGD radius 100000 [qui semper in sequentibus intelligatur, nisi aliũ ponamus] AB $\frac{38268}{100000}$, arcus EC 45 Gr. æqualis GD & FC 67 Gr. 30 Min. dantur. Quia itaque trianguli EAB latera EA [radius] AB cum EAB angulo nota sunt, invenietur EB $1 \frac{26151}{100000}$. Sic quoque triangulorum EAB, GAD latera FB $1 \frac{15876}{100000}$ GB $1 \frac{78533}{100000}$ inveniuntur. Patet itaque CB maximam esse, cum $\frac{3079}{100000}$ partibus excedat rectam EB, hæc vero FB $\frac{9586}{100000}$ superat, & FB excedit GB $\frac{40343}{100000}$ & GB exsuperat BD $\frac{5078}{100000}$: & sic 5 & 6 Axi. lib. 3. Trig. Pitisci.

D vicissim

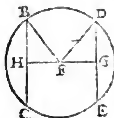
viciſſim BD exceditur; quare minima erit omnium. Quod enim maius maiore eſt, & maius minore eſt: Et quod minus minore, & minus maiore eſt.

PROP. VIII.



AB Semiradius, Arcus HK, KL, LD, ſinguli 30 Grad. dantur. Noti ergo ſunt anguli ACL 150 ACK 120 ACH 90, & duo quælibet latera; quare & baſes
2. Pitiſci Trigon. AL $2\frac{40473}{100000}$ AK $2\frac{13239}{100000}$ AH $1\frac{88679}{100000}$ innoteſcunt. Et cum omnia triangulorum ACL, ACK, ACH. latera nota ſint, cognitæ erunt AE $\frac{66150}{100000}$ AF $\frac{58619}{100000}$ AI
6. Axiom. $\frac{51980}{100000}$. Si hæ inventæ examinentur ad ſenſum propo-
3. trigon. Pitiſci. ſitionis, vera apparebit propoſitio.

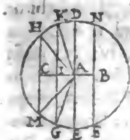
PROP. XIV.



3. Tertij. Sit BC 9, cui æqualis DE. Quia ergo perpendicularis à centro F in BE ducta, eam æquibiſecat, erit BH $4\frac{1}{2}$. Quadrato ergo de
47. Primi. BH ablato à quadrato de FB radio circuli, quem ponimus 6 partium, relinquetur quadratum de HF $15\frac{3}{4}$. Ipſa ergo HF eſt V $15\frac{3}{4}$,
3. Tertij. ſive poteſtate eius reſoluta, 3 ⓪ 968 ③ proxima vero. Tanta erit & FG, cum eiuſdem longitudinis lineam DE æquibiſecet in G. Erunt etiam BC, DE æquales, cum FH & FG æquales ſint. Quadrato enim de FH $15\frac{3}{4}$ à quadrato radij ablato, relinquetur pro quadrato de HB. $20\frac{1}{4}$. Latus ipſum HB. $4\frac{1}{2}$. Tota ergo BC. 9 eſt. Sed quadrato de FH æquale eſt quadratū de FG. Ablatum igitur ab eiuſdem circuli radij quadraro, tantundē occurret pro DG, radice à reliquo extracta.

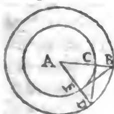
PROP. XV.

Sit diameter DE 8, perpendiculares centro A in rectas MH, KG, cadentes, notæ ſint, ut CA $2\frac{1}{2}$ IA $1\frac{1}{2}$. Radijs MA, KA ductis, apparebit quænam linearum maxima ſit. Quia



Quia ergo anguli ad C & I recti ſunt, quadratis perpendiculorum à quadrato Radij ablatis, ſingularum linearum longitudo apparebit, radice eruta; nempe CM $\surd 7 \frac{4}{64}$ vel tota MH $\surd 30 \frac{15}{16}$ hoc eſt poteſtate eius reſoluta, 5 ⓪ 5621 ④ KI $\surd 13 \frac{159}{256}$ tota KG $\surd 55 \frac{47}{64}$ id eſt potentia reſoluta, 7 ⓪ 3982 ④. Notum eſt ſingulas minores eſſe diametro, cum diameter excedat KG 6018 ④ MH vero 2 ⓪ 4379 ④. Excedit autem & KG rectam MH 1 ⓪ 8361 ④. Ergo cum KG rectam MH ſuperet, ſuperetur vero à DE, minor erit DE recta, maior vero MH. Maxima autẽ omnium DE, quæ diameter circuli eſt.

Prop. XVII.



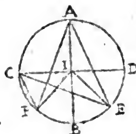
Datur CB Semiradio æqualis. Cum itaque CD media proportionalis ſit, inter CB & CA protractam in circumferentiam BD circuli, erit CD 1 $\frac{11803}{100000}$; & trianguli CAD duobus AC, CD lateribus, & C angulo recto cognitis, innoteſcunt ſinguli anguli, A 48 Gr. 12 Min. cuius tangens invenietur in Tabulis 1 $\frac{11803}{100000}$. Si minuta ſecũda adhiberem⁹ nihil propemodũ differret. ALITER. Secetur AE radius, ut AB, in C ſecta eſt; mai. r portio $\frac{66667}{100000}$, erit ſinus Grad. 41. Min. 48. quadrantis complementum ſunt 48 Grad. 12. Min. quorum erit ſinus in Tabulis $\frac{74547}{100000}$ numerus; ad quem ut 66667, ita 100000 radius ad tangentem 1 $\frac{11803}{100000}$, qui lineæ CD longitudo eſt, ergo & EB lineæ. Eandem fere antea invenimus. ALITER. Quia ex B puncto, in CE circulum caſura tangens, cum unico puncto tangit, [per præcedentis corollarium] & angulos rectos efficit cum radio; radij quadrato, à quadrato de AB ablato, relinquetur pro EB quadrati latere reliqui quæſito ut antea.

8. *Sexti.*
2. *Axiom.*
3. *Trigon. Pitiſci.*
10. *Sexti.*
8 *Axio.*
2 *Trigon. Pitiſci.*

Prop. XX.

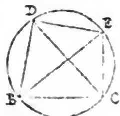
Circuli peripheriæ quadrans ſit CFB arcus, ponaturque ei FBE æqualis. Nota ergo ſunt triangulorum FAE, FCE latera. Nam arcus FB [qui 45 Grad. eſt, utpote arcus CFB dimidium] ſinus $\frac{70711}{100000}$ ſi

D 2 per 2



per 2 multiplicetur, tota recta FE $1\frac{41421}{100000}$ habebitur: Sic & FA invenietur. Nam 45 Grad. si à semiambitu 180 Grad auferantur, relinquuntur 135 Grad. quorum dimidium sunt 67. Grad. 30. Min. huius sinus in tabulis reperitur $\frac{92387}{100000}$ semirecta FA; tota itaque erit $1\frac{84774}{100000}$ cui AE æqualis. Hac via latera quoque CE [quod æquale FA] CF $\frac{76536}{100000}$ inveniuntur. No-
3. *Trigon. Pitisci.* tis itaque triangulorum datorum lateribus, invenientur anguli, & quidem FAE 45 Grad. ut & FCE. Sed FBE arcus 90 Grad. mensura est FIE ad Centrum anguli. Duplus ergo est A & C angulorum, ut hi subdupli illius.

PROP. XXII.



Quadrilateri circulo inscripti datis lateribus BC 120 BD 60 DE 50 EC 32, quæruntur anguli. Ducantur diagonij BE, DC, & punctum intersectionis vocetur F. Quia anguli CBF, EDF utpote in eodem segmento æquales sunt, & oppositi ad F; erunt BFC, DFE triangula æquiangula, ut & DFB EFC triangula ob eandem rationem. Quare ut CB ad BF, ita ED ad DF; & permutando ut BC ad DE, ita BF ad DF: hoc est in minimis numeris ut 12 ad 5. Rursus ut BD ad DF, ita CE ad EF; & alternando vt DB ad EC, ita DF ad FE; id est in minimis numeris ut 33 ad 16. Ergo in continuatis rationibus, earundem partium erit BF 396 DF 165 FE 80. Sed BFE, DFC rectangula æqualia sunt. Si itaque BFE 55680 per DF dividatur, prodibit FC 192 earundem partium. Segmentis in recta linea sibi invicem respondentibus compositis, erunt diagonij ut 476 ad 357, quod est in minimis numeris vt 4 ad 3. Sed rectangula laterum oppositorum quadrilateri simul, rectangulo diagoniorum æquantur: Inveniantur itaque duo numeri in ratione diagoniorum [quæ inventa est sesquitertia] qui inter se multiplicati producant 8112: Huic numero æquabuntur 12 Q ex Algebraico calculo. Resoluta æquatione, unius L. valor erit 26, quare 4 L. valor erit 104 longitudo BE diagonij, & 3 L valor 78 DC. Cum itaque triangulorum DBE, CBE nota sint latera, cogniti etiam erunt anguli, & quidem D angulus 126 Grad. 58 Min. DEB 30 Grad. 32 Min. DBE 22 Grad. 32 Min. C. 53 Grad. 2. Min. CEB 112 Grad. 40. Min. CBE 14 Grad. 16 Min.

Margin notes: 21. *Tertij.* 15. *Primi.* 32 *Primi.* — 4. *Sexti.* — 4. *Octaui.* 23. *Sexti.* 34. *Tertij.* — 9. *lib.* 1. *Almagesti.*

Compo-

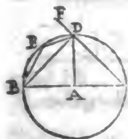
Componantur oppositi anguli.

Grad.	Min.
126	58
53	2
180.	0

Grad.	Min.
30	32
22	32
112	32
14	16
180.	0

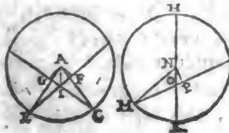
Efficiunt 180 Gr. qui duarum rectarū mensura sunt.

PROP. XXXI.



Arcus DC quadrans arcui DEB æqualis, & DE 38 Grad. dantur. Quadrantis itaque complementum sunt 42 Grad. Inveniuntur ergo latera ut superius in sinuum tabulis, BD 1 $\frac{41420}{100000}$ æqualis DC, ED $\frac{95112}{100000}$ BE $\frac{78672}{100000}$: Et lateribus cognitis reperiuntur & anguli BDC 90 Grad. BED 137 Grad. EBD 11 Grad. 6 Min. EDB 29 Grad. 54 Min. & quidem BDC in semicirculo angulus rectus est, & DCB 45 Grad. in maiori segmento, & in minori segmento BED maior recto. Sic quoque EDC 119 Grad. 54 Min. maior recto est, EBC 56 Gr. 6 Min. minor recto est.

PROP. XXXV.



Si duæ circuli diametri se ad angulos rectos intersecent: notum est segmenta æqualia esse, cum per centrum ambæ sint extensæ, quare si diameter 8 fuerit, rectangula duo æqualia 16 erunt.

Deinde diameter DE 2 ⓪ rectam BC quæ latus sit XII cagoni inscripti, non per centrum extensam secet normaliter in F. Quadratum DFC, rectangulo DFE æquale erit. Est ergo BC 5 ① 1 ② 7 ③ 6 ④ 3 ⑤ 8 ⑥ FC vero 258819 ⓪ cuius quadratum à quadrato radij GC ablatum, radice extracta occurret pro GF 9659266 ⑧. Tota DF 1 ⓪ 9659266 ⑧ à DE diametro ablata, 15 Quarti. 3. Tertij.

ablata, pro FE 1407934 ⑧ relinquetur. DF in FE ducta, rectangulum DFE quadrato BFC 6698727 ⑧ reperietur æquale.

Eadem diametri DE *longitudine retenda, erit* BC, *latus dodecagoni*, $\sqrt{.2-\sqrt{3}}$, FC *vero* $\sqrt{.\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{16}}}$. FG *ergo* [*per praxin præcedentem*] $\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}}$. *Quare* DF $1+\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}}$ *quæ ab* ED *dempta relinquetur* EF, $1-\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}}$.

Ducatur BF $\sqrt{.\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{16}}}$ & DF $1+\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}}$
in FC $\sqrt{.\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{16}}}$ in EF $1-\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}}$

$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{16}}$ quadratum DFC æquale rectangulo DFE.

$+1$
$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{16}}$

$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{16}}$ DFE rectangulum.

Sit HK diameter ut prius 2 ⓪ & ML latus VIII agoni inscripti, inæqualiter sectum in O, ita ut OM $\frac{1}{3}$ sit de ML: Rectangula quoque HOK, LOM inter se æqualia erunt. Est enim ML 7653668 ⑦ MP vero 3826834 ⑦ cuius quadrato à quadrato radij MN ablato & radice extracta reliquo, erit NP. 9238795 ⑦. Sed cum OM $\frac{1}{3}$ sit totius ML, ipsa MO 2551223 ⑦ erit quæ ab MP ablata, OP relinquetur 1275612 ⑦. Quadratis vero de OP, PN compositis, summæ extrahatur radix quadrata, erit NO 9326441 ⑦. Tota ergo HO 1 ⓪ 9326441 ⑦ à diametro HK 2 ⓪ ablata, relinquetur OK 673559 ⑦. Si itaque OL 5102446 ⑦ in OM ducatur erit rectangulum LOM, 1301749 ⑦: tantum quoque est HOK rectangulum. Quare inter se æqualia.

ML *latus* VIII *agoni cum diameter* 2 *ponitur, est* $\sqrt{.2-\sqrt{2}}$, *quare* MP *totius dimidia, erit* $\sqrt{.\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}}$ *cuius quadratum à radij quadrato ablatum qudratum de* NP $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{8}}$ *relinquetur: ipsa ergo* NP $\sqrt{.\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{8}}}$ *erit. Quia autem* MO $\frac{1}{3}$ *est totius* ML, *erit ipsa* MO $\sqrt{.\frac{2}{9}-\sqrt{.\frac{2}{81}}}$, *hæc ab* MP *ablata, erit* OP $\sqrt{.\frac{1}{18}-\sqrt{\frac{1}{648}}}$. *Iam de* OP, PN *quadratis Compositis, erit quadratum de* NO

de ON $\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$, *ipsa ergo* ON $\surd.\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$ *est, quæ addita radio* NH, *tota* OH *erit* $1 + \surd.\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$. *Rursus* OH *à diametro* HK *auferatur, erit* KO *reliqua* $1 - \surd.\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$. *Ablata quoque* MO *de* ML, *relinquetur* OL $\surd.\frac{8}{9} - \surd\frac{32}{81}$.

Ducatur OH $1 + \surd.\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$
in KO $1 - \surd.\frac{5}{9} + \surd\frac{8}{81}$

$+ 1$
$- \frac{4}{9} + \surd\frac{8}{81}$

$\frac{4}{9} - \surd\frac{8}{81}$ KOH rectangulum.

& OL $\surd.\frac{8}{9} - \surd\frac{32}{81}$
in OM $\surd.\frac{2}{9} - \surd\frac{2}{81}$

$\surd.\frac{24}{81} - \surd\frac{512}{6561}$ MOL rectangulum, sive potestate resoluta, $\frac{4}{9} - \surd\frac{8}{81}$.

Rursus duæ se rectæ quarum neutræ per centrum transeant, intersecent in I, nempe BC latus V goni circumscripti, 1 ⓪ 45308505 ⑧ ED vero III goni inscripti, 1 ⓪ 7320308 ⑦ sit vero IC $\frac{1}{3}$, de BC. Est ergo GC totius dimidia, ob perpendicularem AG quem excipit; ipsa itaque GC 72654 ⑤ est; IC vero 48436 ⑤ ab hac ablata, relinquetur GI 24218 ⑤. 3. Tertij.
Quadrato de GC à quadrato radij ablato, occurret quadratum de GA [ipsa ergo GA 68712 ⑤ est] quod quadrato de GI additum, habebitur quadratum de AI, [ipsa ergo AI 72855 ⑤ erit] à quo vicissim quadratum de AF ablatum (Nam quadrato de EF à quadrato Radij ablato, reperitur quadratum de AF 25 ② ipsa ergo AF 5 ① est) quadratum de IF prodibit. Ipsa itaque IF est 52989 ⑤ quæ FD, dimidio totius ED addita, ID occurret, 1 ⓪ 39591 ⑤, hæc ab ED ablata, relinquerur EI 33614 ⑤. Si iam ID in EI ducatur prodibit rectangulum DIE 46917 ⑤. Tantum quoque ex ductu BI 96872 ⑤ in IC fit. Duo itaque rectangula, DIE, BIC inter se æqualia sunt.

Latus V *goni circumscripti*, BC, *in surdis invenitur* $\surd.20 - \surd 320$, *&* ED *trigoni latus inscripti, reperitur* $\surd 3$. GC *itaque est dimidia totius, quare* $\surd.5 - \surd 20$ *erit. Huius quadratum* $5 - \surd 20$ *à quadrato Radij*, 1. *ablatum, quadratum de* GA *relinquetur*

tur $\sqrt{20} - 4$; *ipsa ergo* GA *est* $\sqrt{.}\sqrt{20} - 4$. *Quia* IC *totius* $\frac{1}{3}$ *est, erit ipsa* IC $\sqrt{:2\frac{2}{9}} - \sqrt{3\frac{77}{81}}$, *quæ à* GC *ablata, relinquetur* GI $\sqrt{.\frac{5}{9}} - \sqrt{\frac{20}{81}}$; *cuius quadratum* $\frac{5}{9} - \sqrt{\frac{20}{81}}$ *quadrato de* AG *additum, quadratum de* AI *erit* $\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{4}{9}$ *à quo quadratum de* FA $\frac{3}{4}$ *ablatum (nam de* EF $\frac{1}{4}$ *quadratum à Radij quadrato ablatum, manet quadratum de* AF $\frac{3}{4}$) *relinquetur quadratum de* IF $\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$. *Ipsa ergo* IF *est* $\sqrt{.}\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$ *quæ* FD $\sqrt{\frac{3}{4}}$ *addita, tota* ID *erit* $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{.}\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$ *hæc ablata de* ED $\sqrt{3}$, *manet* EI, *quæ est* $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{.}\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$. *Et dempta* IC *de* BC *restat* BI $\sqrt{.8\frac{8}{9}} - \sqrt{63\frac{17}{81}}$.

Ducatur DI $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{.}\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$
in EI $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{.}\sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$

$+ \frac{3}{4}$
$- \sqrt{15\frac{65}{81}} - 3\frac{25}{36}$

$4\frac{2}{9} - \sqrt{15\frac{65}{81}}$ rectangulum DIE.

Ducatur	BI.	$\sqrt{.8\frac{8}{9}} - \sqrt{63\frac{17}{81}}$	4	$8\frac{1}{9}$
in	CI.	$\sqrt{.8\frac{2}{9}} - \sqrt{3\frac{71}{81}}$	1	$8\frac{2}{9}$
		$19\frac{61}{81}$		$17\frac{7}{9}$
		$15\frac{65}{81}$		$17\frac{7}{9}$
Rectangulum BIC		$\sqrt{.35\frac{45}{81}} - \sqrt{1248\frac{3872}{6561}}$		$316\frac{4}{81}$
Sive potestate eius surda,				$3\frac{77}{81}$
inde resoluta.				$\sqrt{1248\frac{1272}{6561}}$

$4\frac{2}{9} - \sqrt{15\frac{65}{81}}$. ergo rectangula DIE & BIC inter se æqualia sunt.

Prop. XXXVI.

Puncto A cadens recta, per centrum transiens, sit AD 16 ◎ BD vero 12 ◎. Sed AE circulum tangat. Ablata BD de AD relinquetur AB 4, quæ in AD ducta, orietur rectangulum DAB 64 ◎. Quadratum vero de EC

de EC Radio 36 ⓪ à quadrato de AC 100 ⓪ ablatum, quadratum de AE remanet 64 ⓪. Ipsa ergo AE 8 ⓪ erit. Tantum etiam DAB rectangulum erat. Inter se ergo æqualia sunt. Sit recta FI latus V. goni, eidem circulo inscripti 7 ⓪ 05342 ⑤ dimidiæ HI quadrato à quadrato Radij IC 36 ⓪ ablato, relinquetur quadratum de HC 23 ⓪ 5623058988: hoc vicissim à quadrato de CA 100 ⓪ ablato, relinquetur quadratum de HA 76 ⓪ 4376941012. Ipsa ergo HA 8 ⓪ 74285 ⑤ erit. Sed FH est 3 ⓪ 52671 ⑤ utpote æqualis HI. Hac ergo HA lineæ addita, habebitur tota FA. 12 ⓪ 26956 ⑤. Et HI ab HA ablata, IA erit 5 ⓪ 21614 ⑤. Ducta iam IA in FA fit 63 ⓪ 99974269 ⑧ tam prope vero ut parum discrepet, ne quidem parte $\frac{1}{1000}$. Rectangulum igitur FAI, quadrato de EA æquale est.

In surdis magis adhuc veritas propositionis elucescit. Ponatur itaque quod FI *latus sit* V. *goni inscripti. Est ergo* FI √. 90 − √ 1620 *ex genesi libro quarto tradita, cum circuli diameter* 12 *fuerit, quare* HI √. 22½ − √ 101¼ *erit. Huius quadrato* 22½ − √ 101¼ *à quadrato Radij ablato, quadratum de* HC *relinquetur* 13½ + √ 101¼, *quo à quadrato de* AC 100 *ablato, radice eruta quadrato reliquo, pro* HA *recta* √. 86½ − √ 101¼ *manebit. Huic* HI *ablata, relinquetur pro* IA √. 86½ − √ 101¼ − √. 22½ − √ 101¼. *Hac vicissim* FI *addita, tota* FA *erit* √. 86½ − √ 101¼ + √. 22½ − √ 101¼. *Si itaque* FA *in* IA *ducatur, exacte* 64 *pro rectangulo* FAI *prodibunt. Tantum etiam quadratum de* EA *erat.*

Ducatur FA √. 86½ − √ 101¼ + √. 22½ − √ 101¼
in IA. √. 86½ − √ 101¼ − √. 22½ − √ 101¼

+ 86½ − √ 101¼
− 22½ − √ 101¼

64 rectangulum FAI rectangulo DAB æquale.

Rursus ponatur quod FI *latus sit* XV. *goni inscripti, etiam* 64 *prodibunt, & quodcunque aliud ordinatarum figurarum latus ponatur:*

tur: imo & quæcunque alia. Est ergo FI *ex prædicta genesi*, $\sqrt{.63 - \sqrt{405} - \sqrt{.2430 - \sqrt{1180996}}}$. *Quadrato de* HI $15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}$ *à quadrato de* CI *ablato relinquetur quadratum de* HC $20\frac{1}{4} + \sqrt{25\frac{5}{16}} + \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}$: *hoc vicissim à quadrato de* CA *ablato, relinquetur quadratum de*

HA $79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}$ *: ipsa ergo*

HA $\sqrt{.79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}}$ *est.*

Hinc ablata HI, *relinquetur pro* AI

$\sqrt{.79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}} - \sqrt{.15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}}$

Huic FI *addita*, $+ \sqrt{.63 - \sqrt{405} - \sqrt{.2430 - \sqrt{1180996}}}$

tota FA *habebitur, quæ erit*

$\sqrt{.79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}} + \sqrt{.15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}}$.

Ducatur jam FA *in* FI.

$\sqrt{.79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}} + \sqrt{.15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}}$

$\sqrt{.79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}} - \sqrt{.15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}}$

$+ 79\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}$

$- 15\frac{3}{4} - \sqrt{25\frac{5}{16}} - \sqrt{.151\frac{7}{8} - \sqrt{4613\frac{17}{64}}}$

---

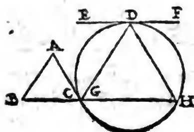
64 Rectangulum FAI.

FINIS TERTII.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM QVARTVS.

PROP. II.

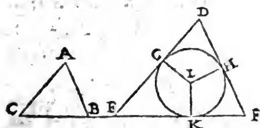


Cognitis utriusque trianguli ABC, DGH lateribus, inuenientur anguli similibus lateribus contenti æquales: A nempe & GDH quilibet 56 Grad. 43 Min. B & G 52 Gr. 8 Min. C & H 71 Grad. 9. Min.

Dati

Dati trianguli ABC, lateribus AB 15 ⊙ BC. 14 ⊙ CA 13 ⊙ cognitis, datique circuli nota diametro 20 ⊙: facilis laterum inscripti trianguli DGH inventio erit. Dato triangulo ABC circulus circumscribatur, *per 5 huius*; diameter circuli erit 16 ⊙ 25 ⊙ ex genesi eius ibidem ostensa. Vt ergo diameter 16 ⊙ 25 ⊙ ad AB, ita diameter 20 ⊙ ad DH, 18 ⊙ 461538 ⊙. Et ut AB ad BC, ita DH ad HG. 17 ⊙ 231168 ⊙. Et ut BC ad CA, ita HG ad GD 16 ⊙ 000370 ⊙. *4. Sext.*

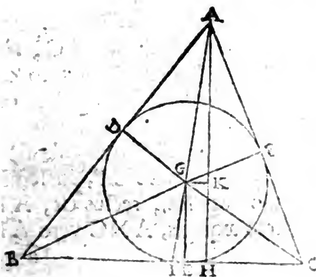
PROP. III.



Cum eadem ABC trianguli latera ponuntur, eadem Angulorum erit quantitas, & ob id etiam angulorum DEF trianguli.

Sint trianguli ABC latera ut in præcedenti, diameter vero circuli GKH, 16 ⊙. Triangulo ABC inscripti circuli diameter, 8 ⊙ erit, *per 4 huius* ubi inventionem eius tradidimus. Vt ergo radius 4 ⊙ ad BC, ita LK radius ad EF. 28 ⊙. Et ut BC ad BA, ita EF, ad FD 26 ⊙. Et ut CB ad CA ita FE ad ED 30 .

PROP. IV.

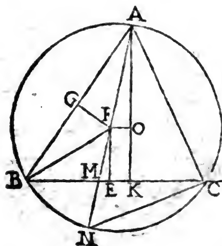


Dato triangulo inscripti circuli diameteri lateribus trianguli cognitis, facilis est inventio. Trianguli ABC, latera AB 30 ⊙ BC 28 ⊙ CA 26 ⊙. Centro circuli demissæ perpendiculares, GD, GE, GF in trianguli latera æquales sunt.

Tria ergo triangula AGB, BGC, CGA in eadem erunt altitudine. Area ergo trianguli ABC per dimidium laterum divisa, exhibebit quotus perpendicularem GE, per conversionem primi lemmatis. Est ergo GE 8 ⊙, semidiameter circuli optata. tota ergo diameter 16 ⊙ erit.

Inveniri poteſt etiam AG, GI, IE, EH, BE. Quia AB, EC rectæ compositæ, dimidium sunt laterum trianguli ABC, ut 2 lemmate dictum est, ablata BA 30 ⊙ de AB, EC 42 ⊙ relinquetur EC 12 ⊙, & AC 26 ⊙ ablata ab AC, BE, relinquetur BE 16 ⊙. Compositæ BE, EC, 28 ⊙ efficiunt, tanta erat BC. Demittatur puncto A per-
13. Secund. pendicularis AH in BC. Erit AH 24 ⊙. Huius quadrato à quadrato de AB ablato, relinquetur quadratum de BH, 324 ⊙ ipsa ergo BH 18 ⊙ erit, à qua BE ablata, relinquetur EH 2 ⊙: Et ablata GE de AH restat AK 16 ⊙. Quadratis de AK & GK quæ EH æqualis est, compositis, GA erit, radice eruta, $\sqrt{260}$ sive 16 ⊙ 124 ⊙. Quia AKG, GEI triangula similia sunt, erit ut AK ad AG, ita GE ad
4. Sexti. GI $\sqrt{65}$ sive 8 ⊙ 062 ⊙. Vel ut AK ad AG ita AH ad AI $\sqrt{585}$ sive, 24 ⊙ 186 ⊙ Quadrato de GE à quadrato de GI ablato, erit IE 1 ⊙.

Prop. V.



13. Secund.

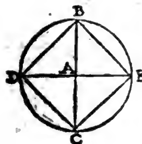
31. Tertij.

Dati trianguli ABC latera sint ut propositione secunda huius, circumscripti circuli diametrum AN inveniemus, ducta NC, recta, & serpendiculari A puncto super BC basin demissa, quæ AK 12 ⊙ erit, centrũ vero circuli F sit. Quia AKB, ACN triangula similia sunt, [nam ACN in semicirculo angulus, rectus est, AKB recto æqualis, ANC vero ABK angulo

angulo æqualis eſt, eo quod in eodem ſegmento exiſtat, ergo 21. Tertij.
N A C, B A K æqualis erit] erit ut A K ad A B ita A C ad 32. Prim.
A N diametrum, 16 ⓪ 25 ②, quam invenire oportebat. 4. Sexti.

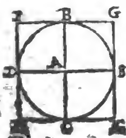
Poſſunt etiam A M, M N, B M, M C, inveniri. Quia triangula A F O, A M K ſimila ſunt, erit ut A O ad A F Radium, ita AK ad A M. Sed AO eſt 7 ⓪ 875 ③. Nam BE dimidia eſt totius B C, eius quadrato, à quadrato Radij, BF ablato, de F E quadratum relinquetur 17 ⓪ 015625 ⑥. Ipſa ergo F E 4 ⓪ 125 ③ eſt: hæc ablata ab A K reſtat A O. Ergo A M 12 ⓪ 38095238 ⑧ erit, & ab A N ablata A M, erit M N 3 ⓪ 86904762 ⑧, quas quæſivimus. Rurſus quadrato de A C à quadrato de A N ablato, reſtat quadratum de N C, 95 ⓪ 0625 ④. Ipſa ergo N C 9 ⓪ 75 ② eſt. Quia itaque triangula A M B, N M C, ſimilia ſunt, [Nam N M C angulus, ad verticem angulo B M A æqualis eſt, & 15. Primi.
M N C antea M B A oſtenſus eſt æqualis, M C N ergo; M A B æqualis eſt] ut C N ad M N ita A B ad quæſitam B M 5 ⓪ 95238 ⑤ erit: hæc à B C ablata, reliqua M C 8 ⓪ 04762 ⑤ quæſita altera erit, quam inveſtigavimus.

Prop. VI.



Dati circuli diameter 2 ⓪ ſit, quem ſemper in ſequentibus huius libri propoſitionibus, retinebimus; erit B E latus quadrati, $\sqrt{2}$ ſive 1 ⓪, 414213 ⑥, quadratis de BA, A E compoſitis, & radice extracta.

Prop. VII.



Latus quadrati circulo circumſcripti, diametro circuli, ſemper æquale eſt; quare nota diametro, latus quoque eius cognitum erit.

Ordo laterum ordinatarum figurarum Circulo inscriptarum, & à Quadrato *incipientium, hic est.*

Quadrati inscripti latus est $\sqrt{2}$.
VIII goni est $\sqrt{.2 - \sqrt{2}}$
XVI goni est $\sqrt{.2 - \sqrt{.2 + \sqrt{2}}}$
XXXII goni est $\sqrt{.2 - \sqrt{.2 + \sqrt{.2 + \sqrt{2}}}}$.

Circumscriptarum figurarum latera à Quadrato *incipientia.*

IV goni est 2.
VIII goni est $\sqrt{8} - 2$
XVI goni est $\sqrt{.16 + \sqrt{128}} - \sqrt{8} + 2$.

Ex Ludolpho XXXII goni est $\sqrt{.32 + \sqrt{521} + \sqrt{.128 + 2\sqrt{1605632}}} - \sqrt{.16 + \sqrt{128}} + \sqrt{8} + 2$

Summa hæc in *Surdis* LVDOLPHI industria, desideratam hanc ambitus Circuli ad diametrum suam rationem propinquiorem quam prior omniũ quotquot eum præcesserũt conatus $3 \frac{1415926535897932384626433832795}{10000000000000000000000000000000}$ vera quidem minorem, & $3 \frac{1415926535897932384626433832755}{10000000000000000000000000000000}$ vera maiorem, tandem exhibuit. Quantum hæc Archimedæa proportione vicinior vero sit, artifices non absque gaudio agnoscunt. Res sane præclara, laude & gloria digna, si quæ unquam hactenus in Mathesi inventa, quæ sola inventoris nomen æterna memoria sacrum posteris traderet, etiamsi alijs inventis ipse per se clarus non foret. Doctissimus ** eumque secutus ** *Canonis sinuum* subsidio, proportionem Archimedæa accuratiorem inquisiverunt. Sed hoc incertum est peræque incertum demonstrare, & ignotum per ignotius declarare, talisque conatus cum partium *Canonis* defectu intercidit. Ad propositum tamen illorum aptiorem numerum ex *Tabulis Palatinis* assumpsissent, hoc pacto. Recta 10 secundis subtensa, invenitur 484814. Ergo qualium portio arcus 10 secundorum fuerit, talium totus circulus 1296000 erit. Vt itaque 10 secundæ ad 484814, ita 1296000 ad 6283189440o erunt. Quare cum diameter 100000 fuerit, circuitus circuli erit $3 \frac{14159}{100000}$, multo illorum ambitu $3 \frac{14172}{100000}$ sive ut illi ponunt $3 \frac{157467}{1111111}$ accuratior. Imo huic *Inclyti Vieta* succincta in surdis proportio $1\frac{4}{5} + \sqrt{1\frac{4}{5}}$ hoc est in determinatis numeris $3 \frac{14164}{100000}$ præferenda. Indorum $\sqrt{10}$ & aliorum falsæ proportiones, jam dudem explosæ sunt. *Recta Methodus*

In fine cõment. ad lib. VI. Element. Euclidis.

Stereometria Inanium Cap. 14.

Lib. VIII. *respõs: Mathemat. Cap.* XV. *prop.* III.

thodus κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον investigandi *proportionem* hanc, ex figurarum circulo inscriptarum & circumscriptarum collatione dependet. Vt si sumatur polygonum 1073741824 laterum, erit inscriptum latus $\sqrt{.2} - \sqrt{.2} + \sqrt{2}$ [hoc est in absolutis numeris $\frac{585167231706863873784}{1000000000000000000000} +$] & si per sui complementi dimidium, hic residuus dividatur, habebitur circumscriptum latus

$$\frac{\sqrt{.2} - \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} +}{\sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} +} =$$

$$\frac{\sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} +}{\sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} +} =$$

$$\frac{2}{\quad} \qquad 1$$

$$\frac{\sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{2}}{\sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{2}}$$

[id est in determinatis numeris $\frac{585167231706863873784}{99999999999999999571974138670} -$.] Omnia ergo latera circumscripti huius polygoni erunt $6\,\frac{2831853071795864915653795}{10000000000000000000000000}$ inscripti vero erunt $6 - \frac{28318530717958643093}{10000000000000000000000}$. Cum ergo circumscripta latera circuli peripheria maiora sint, inscripta minora, cum diameter 100000000000000000 fuerit; erit circuli ambitus minor quam $3\,\frac{1415926535897933}{10000000000000000}$ & quam $3\,\frac{1415926535897932}{100000000000000000}$ maior. Hac *Methodo* vsus *Ludolphus*, sæpiusque attentata, ut operationis suæ certus errorem nullum committeret, *proportionem* supra appositam, *Herculeis* laboribus adinvenit, quam tuto in *Astronomico* calculo absque ullo errore notabili, adhiberi licet. *In libro de circulo belgice edito, Cap. XI.*

PROP. X.

Inventis trianguli A B C lateribus, anguli singuli C B A 72 Grad. cui B C A æqualis, B A C 36 Grad. erunt. Sed A Subduplus est B anguli ut apparet.

Sit C A 4, *ergo* A B 4 *quoque erit.*

Sed

Ordo laterum ordinatarum figurarum Circulo inſcriptarum, & à Quadrato *incipientium, hic eſt.*

Quadrati inſcripti latus eſt $\sqrt{}\,2$.
VIII goni eſt $\sqrt{.2} - \sqrt{2}$
XVI goni eſt $\sqrt{.2} - \sqrt{.2} + \sqrt{2}$
XXXII goni eſt $\sqrt{.2} - \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{2}$.

Circumſcriptarum figurarum latera à Quadrato *incipientia.*

4V goni eſt 2.
VIII goni eſt $\sqrt{8} - 2$
XVI goni eſt $\sqrt{.16} + \sqrt{128} - \sqrt{8} + 2$.

Ex Ludolpho XXXII goni eſt $\sqrt{.32} + \sqrt{521} + \sqrt{.128} + \sqrt{1605632} - \sqrt{.16} + \sqrt{128} + \sqrt{8} + 2$

Summa hæc in *Surdis* LVDOLPHI induſtria, deſideratam hanc ambitus Circuli ad diametrum ſuam rationem propinquiorem quam prior omniũ quotquot eum præceſſerũt conatus $3\frac{1415926535897932384626433832795}{10000000000000000000000000000000}$ vera quidem minorem, & $3\frac{1415926535897932384626433832795}{10000000000000000000000000000000}$ vera maiorem, tandem exhibuit. Quantum hæc Archimedæa proportione vicinior vero ſit, artifices non abſque gaudio agnoſcunt. Res ſane præclara, laude & gloria digna, ſi quæ unquam hactenus in Matheſi inventa, quæ ſola inventoris nomen æterna memoria ſacrum poſteris traderet, etiamſi alijs inventis ipſe per ſe clarus non foret. Doctiſſimus ** eumque ſecutus ** *Canonis ſinuum* ſubſidio, proportionem Archimedæa accuratiorem inquiſiverunt. Sed hoc incertum eſt per æque incertum demonſtrare, & ignotum per ignotius declarare, taliſque conatus cum partium *Canonis* defectu intercidit. Ad propoſitum tamen illorum aptiorem numerum ex *Tabulis Palatinis* aſſumpſiſſent, hoc pacto. Recta 10 ſecundis ſubtenſa, invenitur 484814. Ergo qualium portio arcus 10 ſecundorum fuerit, talium totus circulus 1296000 erit. Vt itaque 10 ſecundæ ad 484814, ita 1296000 ad 6283189440 erunt. Quare cum diameter 100000 fuerit, circuitus circuli erit $3\frac{14159}{100000}$, multo illorum ambitu $3\frac{14173}{100000}$ ſive ut illi ponunt $3\frac{157467}{1111111}$ accuratior. Imo huic *Inclyti Vietæ* ſuccincta in ſurdis proportio $1\frac{4}{5} + \sqrt{1\frac{1}{5}}$ hoc eſt in determinatis numeris $3\frac{14164}{100000}$ præferenda. Indorum $\sqrt{10}$ & aliorum falſæ proportiones, jam dudem exploſæ ſunt. *Recta Methodus*

In fine cõment. ad lib. VI. Element. Euclidis.

Sterrometria Inanium Cap. 14.

Lib. VIII. reſpõſi: Mathemat. Cap. XV. prop. III.

thodus κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον investigandi *proportionem* hanc, ex figurarum circulo inscriptarum & circumscriptarum collatione dependet. Vt si sumatur polygonum 1073741824 laterum, erit inscriptum latus √.2 − √.2 + √ 2 [hoc est in absolutis numeris $\frac{585167231706863873784}{1000000000000000000000}$ +] & si per sui complementi dimidium, hic residuus dividatur, habebitur circumscriptum latus

$$\frac{\sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 +}{\sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 +} =$$

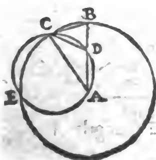
$$\frac{\sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 +}{\sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 +} =$$

$$\frac{\quad}{2} \quad 1$$

$$\frac{\sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{}2}{\sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{}2}$$

[id est in determinatis numeris $\frac{585167231706863873784}{99999999999999999999571974138670}$ −.] Omnia ergo latera circumscripti huius polygoni erunt $6\,\frac{2831853071795864915653795}{10000000000000000000000000}$ inscripti vero erunt $6 - \frac{28318530717958643093}{100000000000000000000}$. Cum ergo circumscripta latera circuli peripheria maiora sint, inscripta minora, cum diameter 100000000000000000 fuerit; erit circuli ambitus minor quam $3\,\frac{1415926,535897933}{10000000000000000}$ & quam $3\,\frac{1415926535897932}{10000000000000000}$ maior. Hac *Methodo* vsus *Ludolphus*, sæpiusque attentata, ut operationis suæ certus errorem nullum committeret, *proportionem* supra appositam, *Herculeis* laboribus adinvenit, quam tuto in *Astronomico* calculo absque ullo errore notabili, adhibere licet. *In libro de circulo belgice edito, Cap. XI.*

PROP. X.



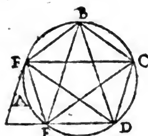
Inventis trianguli A B C lateribus, anguli singuli C B A 72 Grad. cui B C A æqualis, B A C 36 Grad. erunt. Sed A Subduplus est B anguli ut apparet.

Sit C A 4, *ergo* A B 4 *quoque erit.*

Sed

Sed AB *secta est in* D *ex sententia* 11 *prop. secundi libri: ergo* BD, $6-\sqrt{20}$ *sive in absolutis numeris* $1 \frac{52787}{100000}$ *est*, DA *vero* $\sqrt{20}-2$. *Est & DA, aequalis* DC, *&* BC *eidem aequalis.* BC *ergo trianguli* ABC *basis* $\sqrt{20}-2$ *vel in absolutis numeris* $2 \frac{47213}{100000}$ *erit.*

PROP. XI.



Ex praecedente.

Dati trianguli A, *laterea nota sint, quodlibet nempe eius crus*, 4, *ergo basis* $\sqrt{20}-2$ *est, & circuli* BCDEF *diameter* 2. *Triangulo* A *circulus cirsumscribatur*, per 5, huius, *cuius diameter*, $\frac{16}{\sqrt{.10+\sqrt{20}}}$ *sive [divisione peracta]* $\sqrt{.32-\sqrt{204\frac{4}{5}}}$ *erit per eandem. Vt ergo diameter haec se habet ad crus unum trianguli* A, *ita diameter* 2, *se habebit ad crus* EC, *vel* EB, *trianguli* BCE. *Ergo* EC $\sqrt{.2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}$ *est. Et ut crus unum ad basin suam trianguli* A *habet, ita* EC *vel* EB *ad* BC, *quae est* $\sqrt{.2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}$ *desideratum latus pentagoni. Calculus eorum quae hic proposuimus, sequitur.*

Perpendicularis trianguli A via duplici inuestigatur.

Prima via. $\sqrt{20}-2$ basis est:
dimidia $\sqrt{5}-1$
$\sqrt{5}-1$
———
5
1
———
Dimidiae basis $6-\sqrt{20}$. quadrat.

4
4
———
16 Quadratum cruris.
$6-\sqrt{20}$
$\sqrt{.10+\sqrt{20}}$ perpendicularis.

Secunda via, divisa trianguli A area per dimidium basis.

1. Lemma.

4
4
$\sqrt{20}-2$
———
Summa laterū. $6+\sqrt{20}$
$3+\sqrt{5}$
$\sqrt{5}-1$
$\sqrt{5}-1$
———
$6-\sqrt{20}$

$5-\sqrt{5}$
$3+\sqrt{5}$
———
15
-5
———
$10+\sqrt{20}$
$6-\sqrt{20}$
———
$+60$
20
———
$\sqrt{.40}-\sqrt{320}$ area triangtli A.

$1+6$
$1-10$
———
4
16
20
———
320

Per

Per $\sqrt{5} - 1$ dividatur $\sqrt{.40 - \sqrt{320}}$ area.

$$\begin{array}{l} \sqrt{5}+1 \\ \hline 5 \\ 1 \\ \hline 4 \text{ divisor.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}+1 \\ \hline 5 \\ 1 \\ \hline 6+\sqrt{20} \\ 40-\sqrt{320} \\ \hline 240 \\ -80 \\ \hline 160+\sqrt{5120} \\ \sqrt{.10+\sqrt{20}} \end{array}$$

perpendicularis. F puncto cadens.

Poteſt per 13 propoſitionem lib. ſecundi, etiam inveniri: quæ tertia via erit.

$$\begin{array}{l} 4 \\ 16 \\ 20 \\ \hline -\sqrt{320} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{20}-2 \\ \sqrt{20}-2 \\ \hline 20 \\ 4 \\ \hline 24-\sqrt{320} \\ 16 \\ \hline 40-\sqrt{320} \\ 16 \\ \hline 24-\sqrt{320} \\ 12-\sqrt{80} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{20}-2 \\ \sqrt{20}+2 \\ \hline +20 \\ -4 \\ \hline 16 \text{ divisor.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 12-\sqrt{80} \\ 2+\sqrt{20} \\ \hline +24 \\ -40 \\ \hline \sqrt{:}\,286-16 \end{array}$$

$\sqrt{5} - 1$ linea ſub perpendiculari prope angulum acutum.
$\sqrt{5} - 1$

A triã. 16 cruris quad. 5

$6 - \sqrt{20}$ 1

$6 - \sqrt{10}$ eius quadrat.

$\sqrt{.10 + \sqrt{20}}$ perpendicularis.

Vt perpendicularis ad crus triang. A. ita ad diametrũ circuli A triangulo circumſcripti.

$\sqrt{.10+\sqrt{20}}$ .... 4 .... 4 ... $\dfrac{16}{\sqrt{.10+\sqrt{20}}}$

$\dfrac{16}{}$

$\sqrt{.10+\sqrt{20}}$ ... 4 .... 2 E C.

16 ... ... 4 ... $\sqrt{40+\sqrt{320}}$ ... $\sqrt{.2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}$

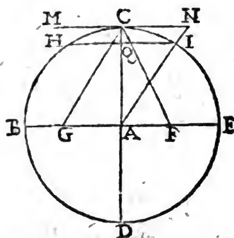
F 4 ..... $\sqrt{20}$

BC

$4 \ldots\ldots \sqrt{20}-2 \ldots \sqrt{.\,2\tfrac{1}{2}+\sqrt{1\tfrac{1}{4}}} \ldots\ldots \sqrt{.\,2\tfrac{1}{2}-\sqrt{1\tfrac{1}{4}}}$

$$\begin{array}{c}\sqrt{20}-2\\ \sqrt{20}-2\\ \hline 20\\ 4\\ \hline 24-\sqrt{320}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}24-\sqrt{320}\\ \hline 48\\ 12\\ \hline 60\\ -20\\ \hline \end{array}$$

$\dfrac{40-\sqrt{320}}{4}$ ($\sqrt{.\,2\tfrac{1}{2}-\sqrt{1\tfrac{1}{4}}}$ ad BC latus Pentagoni.



Faciliorem viam inſcribendi pentagoni docet Ptolomæus, lib. 1. Magnæ cõſtructionis cap. 9, quam hic numeris applicabimus. Quadrato de AF [5 ① quæ dimidia eſt Radij AE] AC addantur, ſummæ radix erit FC 1 ⓪ 118033 ⑥ æqualis GF: à qua AF ablata, GA erit 618033 ⑥. Huius quadrato, Radij AC quadrato addito, quadratum de GC æquale quadrato de HI babebitur 1 ⓪ 381964789089: ipſa ergo HI erit 1 ⓪ 175571 ⑥.

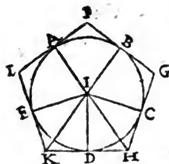
In ſurdis numeris aque facilis eius inventio eſt, quam hic addemus.

$$\begin{array}{c}AF.\ \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2}\\ \hline \tfrac{1}{4}\end{array}\qquad \begin{array}{l}CA.\ 1\tfrac{1}{4}\\ CF\ \sqrt{1\tfrac{1}{4}}\end{array}\qquad GA\ \begin{array}{c}\sqrt{1\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}\\ \sqrt{1\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}\\ \hline 1\tfrac{1}{4}\\ \tfrac{1}{4}\\ \hline 1\tfrac{1}{2}-\sqrt{1\tfrac{1}{4}}\\ CA\ 1\\ \hline \end{array}$$

$\sqrt{.\,2\tfrac{1}{2}-\sqrt{1\tfrac{1}{4}}}$ HI, latus pentago.

Prop.

PROP. XII.



Cum pentagonum qudlibet in tria, resolvatur triangula BCD, BDE, BEF, ut hic apparet, unumquodque autem triangulum tres angulos habet duobus rectis æquales. Tria itaque triangula 6 rectos angulos habent: Quare quodlibet pentagonum, sive ordinatum sive inordinatum fuerit, 6 rectos angulos continebit. 32. Primi.

ALITER. Si circuli centro [quod I vocemus] in singulos angulos F, G, H, K, L, pentagoni rectæ ducantur, erit pentagonum in 5 triangula resolutum: ergo in 10 angulos rectos. Sed 4 ad I centrum ablatis, relinquentur 6 recti ad circumferentiam: quare quilibet pentagoni angulus erit $1\frac{1}{5}$ recti, sive, 108 Grad.

Sit MN pentagoni circumscripti latus, & illud in numeris inveniemus. Quadrato de QI. à quadrato de AI ablato, quadratum de QA relinquetur, quare AQ erit 809017 ⑥ Sunt vero triangula, AQI, ACN similia. Ergo ut AQ ad QI, ita AC, ad CN, 726543 ⑥. Tota ergo MN est 1 ⓪ 453086 ⑥ pentagoni latus circumscripti. *Huc etiam posterius præcedentis propositionis Schema pertinet.*

Eadem plane via in surdis invenietur, cuius praxin in eiusmodi numeris subijciemus.

Quadrat. AI 4
Quadrat. QI $2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$

	4	QI	AC	CN.
AQ.	$\sqrt{.}\,1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ ...	$\sqrt{.}\,2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ ...	1 ...	$\sqrt{.}\,5 - \sqrt{20}$
	2	2		4
	$1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$	$2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$		$\sqrt{.}\,20 - \sqrt{320}$
	$1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$	$1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$		tota MN, pentagoni latus circumscripti.
	$2\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$		
	$-1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$		
	1 diuisor.	$\sqrt{.}\,5 - \sqrt{20}$		

Ordo

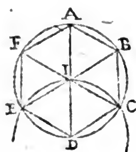
Ordo laterum ordinatarum figurarum circulo inscriptarum & à Pentagono *incipientium hic est.*

Pentagoni inscripti latus est $\sqrt{}.2\frac{1}{2} - \sqrt{}1\frac{1}{4}$.
x goni est $\sqrt{}.1\frac{1}{2} - \sqrt{}1\frac{1}{4}$ sive $\sqrt{}1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.
xx goni est $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2\frac{1}{2} + \sqrt{}1\frac{1}{4}$.
xl goni est $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2\frac{1}{2} + \sqrt{}1\frac{1}{4}$.

Circumscriptarum figurarum latera à Pentagono *incipientia.*

Pentagoni latus circumscriptum est $\sqrt{}.20 + \sqrt{}320$.
x goni est $\sqrt{}.4 - \sqrt{}12\frac{4}{5}$.
xx goni est $\sqrt{}.24 + \sqrt{}320 \dot{-} \sqrt{}.20 + \sqrt{}320$ sive $\sqrt{}20 + 2 - \sqrt{}.20 + \sqrt{}320$.
Ex Ludolpho xl goni est $\sqrt{}18 + \sqrt{}10 + \sqrt{}.20 + \sqrt{}80 \dot{-} \sqrt{}20 + 2 + \sqrt{}.20 + \sqrt{}320$.

PROP. XV.



Ob eandem rationem quæ in 12 adferebatur, quodlibet hexagonum habet 8 angulos rectos, & quilibet ordinali hexagoni angulus est $1\frac{1}{3}$ recti, sive 120 Gr.

Latus hexagoni inscripti, Radio semper æquale est, quo noto & illud innotescit.

Inscripta latera à Trigono *incipientia.*

Trigoni inscripti latus est $\sqrt{}3$.
Hexagoni est 1.
xii goni est $\sqrt{}.2 - \sqrt{}3$.
xxiv goni est $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}3$.
xlviii goni est $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}3$.

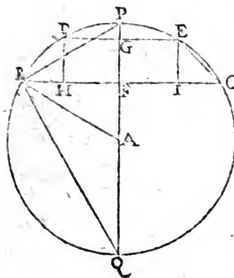
Circum-

Circumſcripta latera à Trigono *incipientia.*

Circumſcriptum Trigoni latus, eſt, $\sqrt{}$ 12.
Hexagoni eſt $\sqrt{}$ 1 $\frac{1}{3}$.
xii goni eſt $\sqrt{}$. 28 − $\sqrt{}$ 768 ſive 4 − $\sqrt{}$ 12.
xxiv goni eſt $\sqrt{}$. 32 + $\sqrt{}$ 768 − 4 + $\sqrt{}$ 12 ſiue $\sqrt{}$ 24 + $\sqrt{}$ 8 − 4 − $\sqrt{}$ 12.

Ex Ludolpho xlviii goni $\sqrt{}$.64 + $\sqrt{}$3072 + $\sqrt{}$.3456 + $\sqrt{}$3200 − $\sqrt{}$ 24 + $\sqrt{}$ 8 − 4 + $\sqrt{}$ 12.

PROP. XVI.



Sic & quintidecagonum quodlibet, 26 continet angulos rectos, & quilibet ordinati angulus erit 1 $\frac{11}{15}$ recti, ſive 156 Grad.

Quia BP Radius circuli eſt, BQ vero triangoni latus, æquale BC, & PBQ angulus rectus, quadrato de BP à quadrato de PQ diametro ſublato, relinquetur quadratum de BQ 3 ⓪. Ipſa ergo BC 1 ⓪ 732050 ⑥ erit: ſed quadrato de BF à quadrato Radij AB ſublato, relinquetur radice extracta pro FA 5 ①. Sed pro AG perpendiculari in latus pentagoni inſcripti cadente invenimus 809017 ⑥; hinc ablata AF 5 ① erit FG 309017 ⑥ æqualis EI. Invenimus etiam pro DE pentagoni inſcripti latere, 1 ⓪ 175571 ⑥: hoc à BC trigoni latere ablato, relinquetur pro BH, IC, ſimul, 556479 ⑥. Sed IC eſt BH æqualis. IC igitur 278239 ⑥ erit. Iam itaque quadratis de IE, IC additis, quadratum de CE erit 1 ① 729084474I0. Ipſa ergo CE 415822 ⑥ eſt, xv goni latus.

31. *Tertij.*
12. *Quart.*

Geneſis xv *goni inſcripti, in ſurdis numeris, nihil diſcrepat à geneſi in*

nesi in Rationalibus numeris tradita, praxin ergo numerorum surdorum, nullis intertextis verbis, nudam subijciemus.

BC $\surd 3$ latus trigoni.

DE $\surd .\, 2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$ latus pentagoni.

---

vna BH, IC. $\surd 3 - \surd .\, 2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$

IC $\frac{\surd 3 - \surd .\, 2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}}{2}$ sive $\surd \frac{3}{4} - \surd .\, \frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$

$\surd \frac{3}{4} - \surd .\, \frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$ 1 $\surd \frac{3}{4}$ $\frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$

$\surd \frac{3}{4} - \surd .\, \frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$ 1 $\surd \frac{3}{4}$ 3   9

$\frac{3}{4}$ $\surd 3$ $\frac{15}{8} - \surd \frac{45}{64}$

$\frac{5}{8} - \surd \frac{5}{64}$ $- \surd .\, 1\frac{7}{8} - \surd \frac{45}{64}$

Quadrat. IC. $1\frac{3}{8} - \surd \frac{5}{64} - \surd .\, 1\frac{7}{8} - \surd \frac{45}{64}$

AG $\frac{\surd .\, 1\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}}{2}$ sive $\surd .\, \frac{3}{8} + \surd \frac{5}{64}$

FG. $\surd .\, \frac{3}{8} + \surd \frac{5}{64} - \frac{1}{2}$ $\frac{3}{8} + \surd \frac{5}{64}$ Hic extrahitur

$\surd .\, \frac{3}{8} + \surd \frac{5}{64} - \frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ latus binomiũ.

$\frac{3}{8} + \surd \frac{5}{64}$ $\frac{9}{64}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{64}$

$+ \frac{5}{8} + \surd \frac{5}{64}$ $\frac{4}{64}$ $\frac{2}{8}$

$- \surd \frac{5}{16} + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$

$\frac{5}{16}$

Quadrat. FG. $\frac{3}{8} - \surd \frac{5}{64}$ $- \surd \frac{5}{16} + \frac{1}{4}$

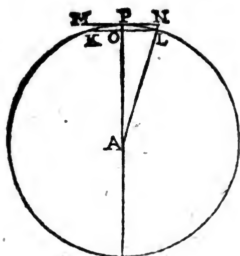
$1\frac{3}{8} - \surd \frac{5}{64} - \surd .\, 1\frac{7}{8} - \surd \frac{45}{64}$

$\frac{3}{8} - \surd \frac{5}{64}$

Quadrat. EC $1\frac{3}{4} - \surd \frac{5}{16} - \surd .\, 1\frac{7}{8} - \surd \frac{45}{64}$

EC. $\surd .\, 1\frac{3}{4} - \surd \frac{5}{16} - \surd .\, 1\frac{7}{8} - \surd \frac{45}{64}$ Latus xv goni inscripti.

Circum-



Circumſcriptum quintidecanguli latus in numeris ſurdis exhibere.

Sit KL *inſcripti* XV *goni latus*, MN *vero circumſcripti. Si de* OL *quadratum, à quadrato de* AL *radio auferatur, relinquetur, radice eruta quadrato reliquo,* OA. *Eſt ergo ut* AO *ad* OL, *ita* AP *ad* PN. *praxis in numeris ſequitur.*

KL $\surd.1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$
OL $\surd.1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$

2

Quadrat. AL. 4
Quadrat. OL $1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$

4

Quadrat. AO $2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$
AO $\surd.2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$

vt AO. ad OL ita AP.

$\surd.2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$ ... $\surd.1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$ ... 1

$2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$-2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16}$
$2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$2\frac{1}{4} + \surd\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$-1\frac{3}{4} - \surd\frac{5}{16}$
$5\frac{1}{16}$	$3\frac{15}{16}$	4
$\frac{5}{16}$ $\surd 5$	$\frac{5}{16}$ $\surd\frac{5}{16}$	$\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$
$\frac{5}{8}$	1	16.256.
$5\frac{3}{8} + \surd 6\frac{21}{64}$ $\frac{3}{8}$	$3\frac{5}{8} - \surd\frac{5}{64}$ 3	
$-1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$	$-30 - \surd 180$
		$-\surd.30 - \surd 180$
$\surd.3\frac{1}{2} + \surd 11\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4} - \surd.30 - \surd 180.$	
		$3\frac{1}{2} +$

3 1/2 + √ 11 1/4
3 1/2 − √ 11 1/4

12 1/4
11 1/4

1 diviſor.

√.5 1/2 − √ 1 1/4 − √.30 − √ 180
5 1/2 − √ 1 1/4 − √.30 − √ 180
3 1/2 − √ 1 1/4   23 1/2 − √ 551 1/4

19 1/4   690
3 3/4   15

23 − √ 500   705
315

√.1020 − √ 1039680

ad PN √.23 − √ 500 − √.1020 − √ 1039680

Eſt ergo tota MN √.92 − √ 8000 − √.16320 − √ 266158080 *Latus*, xv goni *circumſcripti, ſiue cum poteſtas eius ſurda ſurdè reſolvitur*, *verum* xv goni *latus circumſciptum erit* √ 27 − √ 15 − √.50 − √ 2420.

Latus xxx goni *inſcripti, eſt*, √.2 1/4 − √ 5/16 − √.1 7/8 + √ 45/64 *cirumſcripti vero, eſt*, √.28 − √ 320 − √.960 − √ 766080.

Latus LX goni *inſcripti, eſt*, √.2 − √ 15/16 + √ 3/16 − √ 5/8 − √ 5/64 *circumſcripti, eſt*, √.96 + √ 800 + √.16320 + √ 266158080 − √.92 + √ 8000 + √.16320 + √ 266158080. *ſiue* √.60 + √ 2880 + √ 20 + 4 + √.50 + √ 2420 + √ 27 + √ 15.

Surda lateris xv *goni* circumſcripti poteſtas, ſurde reſolvitur.

92 − √ 8000 − √.16320 − √ 266158080
92 − √ 8000

8464
8000

16464 − √ 270848000
16320 − √ 266158080

144 − √ 20480
144

20736

20736
20480

2 5 6

1 | 6 |

14 4 | 144
160 | 80

√ 80 – 8 | 64

92 – √ 8000

84 – √ 6480
42 – √ 1620
42

1764
1620

1 4 4

1 | 2 |

4 2 | 42
| 27

5 4 | √ 15

√ 27 – √ 15 – √. 50 – √ 2420 circumscripti xv goni latus verum.

FINIS QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTORVM QVINTVS.

PROP. I.

	9	
A. 2	B. 3	C. 4
D. 8	E. 12	F. 16
	36	

Numerorum A, B, C, *æquemultiplices totidem sumantur, singuli singulorum, ut* D *quadrupla numeri* A, *&* D *ipsius* B, *&* F *ipsius* C *quadrupla.* DEF *numeri simul sumpti*
G
tam

tam sunt multiplices numerorum ABC *simul sumptorum, quam est multiplex* D *ipsius* A, *vel* E *ipsius* B, *vel* F *ipsius* C. *Recipit enim* 36 *novenarium quater, quoties & 8 binarium.*

PROP. II.

A. 4	B. 2	E. 10	AE. 14
C. 6	D. 3	F. 15	CF. 21

Sit primus numerus A *tam multiplex secundi* B, *quam est* C *tertius, multiplex quarti* D, *hoc est utrumque uterque bis contineat. Sit etiam quintus* E *tam multiplex secundi* B, *quam est* F *sextus ipsius quinti* D, *id est uterque utrumque quinquies recipiat. Primus & quintus compositi, toties secundum continebunt, quoties sextus & tertius additi, quartum.* 14 *namque in se* 2 *recipit septies, toties & 21 tria.*

PROP. III.

A. 9	B. 3	E 36
C. 12	D. 4	F 48

Primus numerus A *tam sit multiplex secundi* B, *quam tertius* C *quarti* D, *uterque utrumque ter contineat. Primo & tertio aequemultiplicibus* E, F, *sumptis, tam est* E *ipsius* B *multiplex, quam* F *ipsius* D. *uterque namque utrumque* 12 *ies continet.*

PROP. IV.

E. 9	A 3.	C. 6	F. 18
G. 4	B. 2	D 4	H. 8
E. 18	A 3.	C. 6	F. 36
G. 18	B 2.	D. 4	H 36
E. 12	A. 3	C. 6	F 24
G. 14	B. 2	D 4	H 28

6. Defin. Quinti.

Sit A *ad* B *ut* C *ad* D. *Primi* A *& tertij* C *aequemultiplices* F E, *sumantur: item secundi* B, *& quarti* D *aequemultiplices* G *&* H, *iuxta quamvis multiplicationem. Ergo si* E *excedit* G, *etiam* F *excedit* H. *& si* E *aequalis est ipsi* G, *etiam* F *aequalis erit* H, *& si* E *deficit à* G, *etiam* F *deficiet ab* H. *Alioqui non esset eadem ratio* A *ad* B

qua

quæ C *ad* D, *si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, ita esse* E *multiplicem primi, ad* G *multiplicem secundi, ut* F *multiplex tertij, ad* H *multiplicem quarti. Hoc est, si rursus ponatur* E *primus numerus,* G *secundus,* F *tertius* H *quartus, sumanturq; horum æquemultiplices, nempe* I K, *ipsorum* E F, & L M, *ipsorum* G H. *Quoniam ergo tam multiplex est* E *primus ipsius* A *secundi, quam* F *tertius ipsius* C *quarti; sumpti autem sunt* I & K *æquemultiplices ipsorum* I, F, *primi & tertij: Erunt quoque ex æquo* I, K, *æquemultiplices ipsorum* A, C, *secundi & quarti. Eadem ratione erunt* L M *ipsorum* B D *æquemultiplices. Et quia* 3. Quint.

I. 27	E 9	F. 18	K. 54
L. 8	G. 4	H. 8	M. 16
I. 36	E. 9	F. 18	K. 72
L. 36	G. 4	H. 8	M 72
I 18	E. 9	F. 18	K. 36
L. 20	G. 4	H 8	M 40

ponitur ratio A *ad* B, *quæ* C *ad* D: *ostensique* I, K, *æquemultiplices* A, C, *item* L, M, *æquemultiplices* B, D. *Fit, ut si* I *multiplex primi excedit* L *multiplicem secundi, etiam* K *multiplex tertij necessario excedat* M *multiplicem quarti. Et si* I *æqualis sit* L, *etiam* K *ipsi* M. *Et si* I *deficiat ab* L, *etiam* K *ab* M. *Idemque ostendetur in quibuscunque æquemultiplicibus numerorum* E & F; *necnon numerorum* G & H. *Erit ergo ut* E *primus ad* G *secundum, ita* F *tertius ad* H *quartum. Si primus igitur.* 6. Defin. Quinti.

PROP. V.

E. 4	A. 12	C. 8
F. 2	B. 6	D. 4

Sit ita multiplex totus A *totius* B *ut est multiplex* C *ablatus, ablati* D: *etiam reliquus* E *ita est multiplex reliqui* F, *ut totus* A *totius* B. *Cum enim* 12 *in se* 6 *bis recipiat, &* 8 *à* 12 *ablatus in se* 4 *à* 6 *ablatum toties comprehendat; etiam* 4 *reliquus ex ablatione* 8 *à* 12, *reliquum* 2 *ex subductione* 4 *à* 6 *bis in se continebit, ut manifeste apparet.*

PROP. VI.

Sint A & B *æquemultiplices ipsorum* C & D, *detractis* G 2 E, F, *cor.*

G. 6	A. 18	C. 6	E. 12
H. 4	B. 12	D. 4	F. 8
G. 14	A. 35	C. 7	E. 21
H. 10	B. 25	D. 5	F. 15

E, F, *eorundem* C, D, *æquemultiplices: Reliqui* G H; *aut sunt æquales eisdem* C, D, *ut in primo exemplo, aut eorundem æquemultiplices ut in altero videre est.*

Prop. VII.

A. 15	C. 4	B. 15

Cum A *sit* B *æqualis, habebit* A *ad* C, [*ut hic poniter*] *rationem triplam supertripartientem quartas, & eandem* B *ad* C. *Et* C *ad* A *rationem habebit subtriplamsupertripartionem quartas, ut quoque ad* B.

Prop. VIII.

A. 16	B. 8	C. 4
A. 6	B. 4	C. 8

Sit A *maior numerus*, B *minor*, *tertius quilibet* C. *Notum est rationem* A *ad* C *maiorem esse* [*utpote quadrudam in primo exemplo, & subsesquitertiam in secundo*] *ratione* B *ad* C [*nempe dupla in primo, & subdupla in secundo:*] *cum denominatores rationum maiores sint*. 4 *enim* 2 *maior est, &* 1 $\frac{1}{3}$ *maior* $\frac{1}{2}$. *Notum quoque est è converso, rationem* C *ad* B [*utpote subduplam in primo & duplam in altero,*] *maiorem esse ratione* C *ad* A [*nempe subquadrupla in priore, & sesquitertia in posteriore:*] *cum rationum denominatores maiores sint. Est enim* $\frac{1}{2}$ *maior quam* $\frac{1}{4}$ *&* 2 *maior quam* 1 $\frac{1}{3}$.

Prop. IX.

Hæc conuertit utramque septimæ propositionis partem.

Prop. X.

Hæc totam octauam convertit.

Prop.

PROP. XI.

G. 27 36 18	I. 18 24 12	H. 36 48 24
A. 9	E. 6	C. 12
B. 6	F. 4	D. 8
K. 24 36 12	M. 16 24 8	L. 32 48 16

Sint rationes A *ad* B *&* C *ad* D, *eadem rationi* E *ad* F. *Etiam* A *ad* B *&* C *ad* D *eadem inter se erunt. Sumantur enim ad omnes antecedentes* A, C, E, *aequemultiplices* G, H, I, *& ad consequentes,* B, D, F, *aequemultiplices* K, L, M. *Quia ergo* A *primus ad* B *secundum ponitur ut* E *tertius ad* F *quartum: Fit ut si* G *multiplex primi maior sit* K *multiplice secundi vel aequalis, vel minor.* 6. Defin. Quinti. *Etiam* I *multiplex tertij maior erit multiplice* M *quarti, vel aequalis vel minor. Sed si* I *maior est quam* M, *vel aequalis, vel minor. Est quoque* H *maior quam* L, *vel aequalis, vel minor. Quia ponitur* E *primus ad* F *secundum ut* C *tertius, ad* D *quartum. Quare si* G *multipelx primi* A, *excedit* K *multiplicem secundi* B; *excedet quoque* H *multiplex tertij* C, *multiplicem* L, *quarti* D. *Et si* G *aequalis vel minor quam* K *sit, ita* H *quam* L *minor vel aequalis erit. Idemque eueniet in alijs quibuscunque aequemultiplicibus. Erit ergo* A *primus ad* B *secundum, ut* C *tertius ad* D *quartum.*

PROP. XII.

Quod Euclides *propositione prima de proportione multiplici demonstravit, hic de omni genere proportionis ostendit, etiam irrationalis.*

PROP. XIII.

A. 6	C. 3	E. 4
B. 4	D. 2	F. 3

Sit ratio primi A *ad* B *secundũ ut* C *tertij ad quartum* [*ut hîc sesquialtera.*] *Sit autem* C *ad* D *maior quam* E *quinti ad* F *sextum* [*quae est sesquitertia.*] *Evincas esse*

rationem A *ad* B *maiorem esse* E *ad* F. *Nam denominator rationis* C *ad* D *est* 1 $\frac{1}{2}$; *& idem* A *ad* B. *denominator vero* E *ad* F *est* 1 $\frac{1}{3}$. *Est vero* 1 $\frac{1}{3}$ *minor quam* 1 $\frac{1}{2}$.

Prop. XIV.

A.	2 9 12	C.	8 9 6
B.	8 9 3	D.	4 9 12

8. Quint. *Sit* A *ad* B *ut* C *ad* D. *Sit* A 12 *quam* C.6. *maior. Erit ergo ratio* A *maioris ad* B, *maior, quem* C, *minoris ad eundem. Quia itaque est* C *primus ad* D *secundum ut* A *tertius ad* B *quartum: ratio autem* A *ad* B *maior est ut ostendimus, quam*
13.Quint. C *quinti ad* B *sextum: maior quoque erit ratio* C *primi ad* D *se-*
10.Quint. *cundum, quam* C *quint* B *sextum. Minor ergo* D *est quam*
7.Quinti. B. *Sit* A *aequalis* C. *e go* A *ad* B *ut* C *ad* D. *Quia* C *ad* D *&* C *ad* B *rationes eadem sunt rationi* A *ad* B; *erunt quoque*
9.Quinti. C *ad* D, *&* C *ad* B *eadem inter se. Sit* A 2 *quam* C 8 *minor. Eritque ob hoc maior ratio* C *maioris ad* B *quam* A *minoris ad*
13. Quin. *eundem. Et cum minor sit ratio* C *primi ad* D *secundum, quam* C
10. Quin. *quinti ad* B *sextum; minor erit* B *quam* D.

Prop. XV.

A. 5	B. 7
C. 25	D. 35

Sit A *pars de* C *&* B *pars de* D: *recipiat* C *toties* A, *quoties* D *recipit* B. *Quia ergo ut una antecedentium* A *ad unam consequentium*
11. Quin. B, *ita omnes antecedentes* C *ad omnes consequentes* D. *Ergo cum* C *ad* D *sit ratio subsuperbipartiens quintas, eadem erit &* A *ad* B.

Prop. XVI.

E. 40	A. 20	C. 10	G. 20
[illegible]	B. 8	D. 4	H. 16

Sit A *ad* B *ut* C *ad* D, *erit vicissim* A *ad* C, *ut* B *ad* D. *Sumptis* A *primi &* B *secundi*

B *secundi æquemultiplicibus* E, F, *&* C *tertij* D *quarti*, *æquemultiplicibus* G, H. *Erit* E *ad* F, *&* A *ad* B, *&* G *ad* H *ut* C *ad* D. *Cum itaque proportiones* E *ad* F, *&* C *ad* D *eædem sint* 15. Quin.
proportioni A *ad* B, *erunt ipsæ inter se eadem. Et quia* E *ad* F *&* 11. Quin.
G *ad* H *rationes sunt eadem rationi* C *ad* D, *inter se sunt eadem. Nempe ut* E *primus ad* F *secundum, ita* G *tertius ad* H *quartum. Quare si* E *primus maior est quam* G *tertius, vel æqualis, vel minor; erit quoque* F *secundus maior quam* H *quartus, vel æqua-* 14. Quin.
lis vel minor. Est igitur A *primus, ad* C *secundum, ut* B *tertius* 6. Defin.
ad D *quartum: quod est propositum.* Quintl.

PROP. XVII.

A. 16	C. 12	D. 4
B. 8	E. 6	F. 2

A *numerus ex* C, D, *compositus, &* B *ex* E, F, *dentur; & sit ut* A *ad sui partem* D, *ita totus* B *ad sui partem* F. *Cum itaque hi compositi proportionales sint, divisi etiam proportionales erunt: nempe* C *ad* D *ut* E *ad* F. *Qui cupit demonstrationem, petat ex* 1 *&* 2 *prop. huius, &* 6 *defin. quam ob prolixitatem intermisimus.*

PROP. XVIII.

Hæc conuertit præcedentem propositionem.

PROP. XIX.

Hæc de omni proportione etiam irrationali idipsum demonstrat, quod superius in quinta propositione de multiplici proportione ostendit.

PROP. XX.

A	B	C	D	E	F
9	6	3	12	8	4
9	3	9	6	2	6
6	12	18	8	16	24

Tres numeri sint A B C *totidem* D E F *qui bini in eadem ratione sumantur. Sit autem* A *primus, quam* C *tertius maior, &* D *quartus maior erit* F *sexto. Nam cum*

8. Quint. cum A maior sit quam C, maior erit ratio A ad B quam C ad
B. Est autem ut A ad B ita D ad E. maior ergo ratio erit D ad E,
13. Quint. quam C ad B. Et ut C ad B ita F ad E. Maior igitur ratio D
10. Quint. ad E quam F ad E. Quare D quam F maior erit. Et si A æqualis C fuerit, etiam D æqualis F erit. Quod si A minor C fuerit, etiam D minor F erit.

Prop. XXI.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
6	4	2	6	3	2
9	6	9	4	6	4
8	12	4	12	4	6

Tres sint numeri A, B, C, totidemque D, E, F, qui bini in eadem ratione sumantur; sitque eorum perturbata proportio, nempe ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C ita D ad E. Sit vero A primus maior quam C tertius, etiam D quartus maior erit quam F sextus. Cum enim A maior sit quam C, maior erit ratio A ad B
8. Quint. quam C ad B. Est autem ut A ad B, ita E ad F. Maior ergo ratio
13. Quin. E ad F est, quam C ad B. Quia vero ut B ad C, ita D ad E; erit convertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare maior quoque erit
10. Quin. ratio E ad F quam E ad D; ideoque maior D quam F. Et si A æqualis C fuerit, etiam D æqualis F erit. Quod si A minor fuerit, etiam D minor F erit.

Prop. XXII.

G. 30	I. 36	L. 15
A. 6	B. 12	C. 3
D. 2	E. 4	E. 1
H 10	K. 12	M. 5

Sint tres numeri A B C, totidemque D E F. Sitque A ad B ut D ad E, & B ad C ut E ad F. Ex æquilitate A ad C ut D ad F erit. Sumptis eorum æquemultiplicibus ex sententia 6 definitionis huius: nempe A, D, æquemultiplices G, H. B, E; I, K. C, F; L, M. Erit G multiplex primi A, ad I multiplicem secundi B, ut H multiplex tertij D ad K multiplicem quarti E; & I multiplex, ad L multiplicem, ut K mul-

ut K *multiplex ad* M *multipilicem. Quoniam igitur tres sunt numeri*, G, I, L, *totidem* H, K, M; *qui bini in eadem ratione sumuntur; fit ut si* G *primus superet* L *tertium, superat quoque quartus* H, M *sextum. Si æqualis, æqualis; si dificit, deficiat. Itaque cum* G H *æquemultiplices primi* A *& tertij* D, *vel excedant* L, M, *æquemultiplices* C *secundi &* F *quarti. Vel una æquales sint: vel deficiant. Erit* A *primus ad* C *secundum, ut* D *tertius ad* F *quartum.*

4. Quint.
10. Quin.
6. Defin. Quinti.

PROP. XXIII.

G. 18	H. 8	K. 6
A. 6	B. 4	C. 2
D. 6	E. 3	F. 2
I. 12	L. 9	M. 4

Tres sint numeri, A, B, C, *tresque alij* D, E, F, *quorum sit perturbata proportio. Erit* A *ad* C *ut* D *ad* F. *Sumptis namque eorum æquemultiplicibus* GHK, ILM, *Erit ut* A *ad* B *ita* G *ad* H. *At ut* A *ad* B *ita* E *ad* F. *Ergo ut* G *ad* H, *ita* E *ad* F. *Sed ut* E *ad* F, *ita* L *ad* M. *Igitur ut* G *ad* H, *ita* L *ad* M. *Rursus quia est* B. 1 *us*, *ad* C. 2. *ut* D. 3. *ad* F. 4. *Eorum æquemultiplices similiter erunt, nempe* H *ad* K *ut* I *ad* L. *Quia igitur tres sunt numeri*, GHK, *totidemque* ILM, *bini in eadem ratione perturbata sumpti, ut demonstravimus, fit ut si* G. 1 *us*, *superet* K. 3. *etiam* D. 4. *superet* M. 6. *& si æqualis, æqualis, & si deficit, deficiat. Itaque cum æquemultiplices* G *&* I, K *&* M *una vel excedant, vel æquentur vel deficiant, erit ut* A. 1 *us*, *ad* B. 2. *ita* D. 3. *ad* F. 4. *quod est propositum.*

15. Quin.
11. Quin.
15. Quin.
11. Quin.
4. Quinti.
21. Quin.
6. Defin. Quinti.

PROP. XXIV.

Quod de sola proportione multiplici propositione secunda ostendit idipsum nunc demonstrat de omni proportione, etiam irrationali.

PROP. XXV.

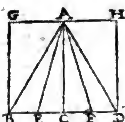
A. 12	B. 4
C. 9	D. 3
AD. 15	BC. 13

Sit A *ad* B *ut* C *ad* D, A *vero maior* D *minor. Quod* A *&* D *additi maiores sint* B *&* C *additis, facile ostendi potest, si numeri hi, demonstrationi nostræ in lineis adhibeantur, ad quam propositionis quoque in numeris veritas examinetur.*

FINIS QVINTI.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
SEXTVS.

PROP. I.



Triangulorum ABC, ACD, altitudo AC, ſit 13 ⓪ baſis BC 7 ⓪ 5 ① æqualis CD. Quia BC ad CD baſin rationem habet æqualitatis, etiam triangulum ABC ad ACD eandem æqualitatis rationem habebit, ex ſententia propoſitionis. Sed triangulum ABC Eſt 48 ⓪ 7 ① 5 ②. Tantum Etiam ACD triangulum. Inter ABC ergo & ACD triangula, ratio eſt æqualitatis, ut & inter baſes BC, CD.

1. Lemma.

Retentis iiſdem numeris altitudinis & baſium, ſi quis demonſtrationem in ſurdis, verbis demonſtrationis in lineis applicare voluerit arcam ſingulorum triangulorum, inveniet, ſi hunc ad modum calculum eorum inſtituat. Quia EC *dimidia rectæ* BC *eſt, quadratis altitudinis & baſis* EC, *& viciſſim altitudinis, & baſis* BC *compoſitis, radice eruta, erit* EA $\sqrt{183\frac{1}{16}}$ BA $\sqrt{225\frac{1}{4}}$. *calculus non difficilis, lateribus cognitis.*

Triangulum ABC.	Triangulum ACE
$20\frac{1}{2} + \sqrt{225\frac{1}{4}}$	$16\frac{3}{4} + \sqrt{183\frac{1}{16}}$
$10\frac{1}{4} + \sqrt{56\frac{5}{16}}$	$8\frac{3}{8} + \sqrt{45\frac{49}{64}}$
$10\frac{1}{4} - \sqrt{56\frac{5}{16}}$	$8\frac{3}{8} - \sqrt{45\frac{49}{64}}$
$+105\frac{1}{16}$	$+70\frac{9}{64}$
$-56\frac{5}{16}$	$-45\frac{49}{64}$
$48\frac{3}{4}$ area ABC, areæ ADC æqualis.	$24\frac{3}{8}$ area AEC areæ AFC æqualis.

Triangu-

Triangulum ABE.

$\sqrt{225\frac{1}{4}} + \sqrt{183\frac{1}{16}} + 3\frac{3}{4}$
$\sqrt{56\frac{5}{16}} + \sqrt{45\frac{49}{94}} + 1\frac{7}{8}$
$\sqrt{56\frac{5}{16}} - \sqrt{45\frac{49}{64}} + 1\frac{7}{8}$.

$59\frac{53}{64}$
$45\frac{49}{64}$

$\sqrt{791\frac{229}{256}} + 14\frac{1}{16}$
$\sqrt{791\frac{229}{256}} - 14\frac{1}{16}$

$+ 791\frac{229}{256}$
$- 197\frac{103}{256}$

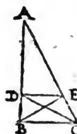
$\sqrt{594\frac{9}{64}}$

$\frac{38025}{64}$

2 1 0
3 8 0 2 5
1|9|5|
2 3 8

$\frac{195}{8}$ ($24\frac{3}{8}$ area ABE areæ ADF æqualis.

PROP. II.



Sit AB 12 ⓪ BC 5 ⓪. Ergo AC 13 ⓪ erit, cum ABC angulus rectus sit. Sit AD 9, ergo DB 3. Cum itaque sit ut AD ad DB ita AE ad EC ex sententia propositionis. Est vero AD ad DB proportio tripla, erit AE 9 ⓪ 75 ② EC 3 ⓪ 25 ②. Vel ut AB ad AD ita AC ad AE. Et inventa AE de AC ablata, relinquetur EC. Vt applicentur demonstrationi in lineis, propositi numeri: cum ADE angulus rectus sit, ablato quadrato de AD à quadrato de AE, radice eruta, erit DE 3 ⓪ 75 ②. Triangulum ergo ADE 16 ⓪ 875 ③ erit, & BDE 5 ⓪ 625 ③ cui CDE æquale est. Si quis cupit aream [ex secundo lemmate,] triangulorum BDE, CDE, erit EB $\sqrt{23\frac{1}{16}}$ sive 4 ⓪ 8023 ④ DC, $\sqrt{34}$, sive 5 ⓪ 8309 ④.

47. Primi. *18. Quinti.* *2. Lemma.* *37. Primi.* *47. Primi.*

Triang. D B E.

$6\frac{3}{4} + \sqrt{23\frac{1}{16}}$

$3\frac{3}{8} + \sqrt{5\frac{49}{64}}$
$3\frac{3}{8} - \sqrt{5\frac{49}{64}}$

$+ 11\frac{25}{64}$
$- 5\frac{49}{64}$

$5\frac{5}{8}$ area D B E.

Triang. C D E.

$7 + \sqrt{34}$

$3\frac{1}{2} + \sqrt{8\frac{1}{2}}$
$3\frac{1}{2} - \sqrt{8\frac{1}{2}}$

$12\frac{1}{4}$
$8\frac{1}{2}$

$3\frac{3}{4}$

4
2025

4 | 5 | 45
8 8

$\sqrt{8\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}$
$\sqrt{8\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

$+ 8\frac{1}{2}$
$- \frac{1}{16}$

$8\frac{7}{16}$
$3\frac{3}{4}$

$\sqrt{31\frac{41}{64}}$
$\frac{2025}{64}$

($5\frac{5}{8}$ area D C E.

Prop. III.



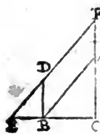
Sit A B 7 ◎: A C 9 ◎: B C 8 ◎. Cum ergo ut BA ad AC ita BD ad DC est; sed BA ad AC ratio subsuperbipartiens septimas est; ergo BD 3 ◎ 5 ① erit, D C vero 4 ◎ 5 ①. Vel ut BA, A C simul ad B A, ita B C ad B D, 5 ◎ 5 ①; qua de BC ablata, erit DC 4 ◎ 5 ① ut antea.

38. *Quinti.*

Quia omnia A B C trianguli latera dantur, ergo & anguli, B nempe 63 Grad. 6. Min. C. 57 Gr. 31. Min. Sed notis duobus lateribus [ut BA 7 BD $3\frac{1}{2}$ vel A C 9 D C $4\frac{1}{2}$] cum uno angulo [ut B vel C iam inventis] anguli B A D, D A C invenientur, quilibet 29. Gr. 41. Min. 30. Sec.

Prop. IV.

47. *Primi.*

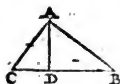


Sit AC 8 ◎ BC 6 ◎ ergo B A 10 ◎ erit. Sit D E 4 ◎: quare B E 3 ◎ erit & DE 5 ◎. Sed A C ad D B ratio dupla est, & C B ad B E dupla quoque erit. Sic & A B ad D E, ratio, dupla est.

A erit 36. Grad. 53. Min. æqualis D; & B 53. Grad. 7. Min. æqualis E.

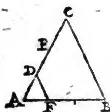
Prop.

PROP. VIII.



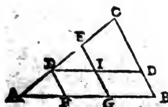
Sit AC 9 ⓪ AB 12 ⓪. Ergo CB 15 ⓪ erit. 47. Primi.
Iam ut BC ad CA ita CA ad CD 5 ⓪ 4 ① qua à CB ablata erit DB 9 ⓪ 6 ①. Quadrato de CD à quadrato de CA ablato, relinquetur pro AD 7 ⓪ 2 ①. Vel ut CA 47. Primi.
ad AB, ita CD ad DA. Et ut CB ad BA ita CA ad AD.

Erit itaque C 53. Grad. 8. Min. æqualis DAB angulo, & B 36. Grad. 52. Min. æqualis CAD angulo.



PROP. IX.

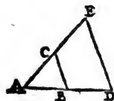
Sit CA 18 ⓪ AB 15 ⓪ AD 6 ⓪. Vt ergo AC ad DA ita BA ad FA 5 ⓪.



PROP. X.

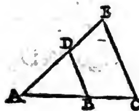
Eadem via partes insectæ per sectam inveniuntur, ut in præcedenti.

PROP. XI.



AB 8 ⓪ sit, AC 6 ⓪. æqualis BD. ut AB ad BD ita AC ad CE 4 ⓪ 5 ①.

PROP. XII.



AB 8 ⓪ sit, BC 6 ⓪ AD 4 ⓪ 5 ①: vt AB ad BC ita AD ad DE 3 ⓪ 375 ③.

Triang. D B E.

$6\frac{1}{4} + \sqrt{23\frac{1}{16}}$

$3\frac{1}{8} + \sqrt{5\frac{49}{64}}$
$3\frac{1}{8} - \sqrt{5\frac{49}{64}}$

$+11\frac{25}{64}$
$-5\frac{49}{64}$

$5\frac{5}{8}$ area D B E.

Triang. C D E.

$7 + \sqrt{34}$

$3\frac{1}{2} + \sqrt{8\frac{1}{2}}$
$3\frac{1}{2} - \sqrt{8\frac{1}{2}}$

$12\frac{1}{4}$
$8\frac{1}{2}$

$3\frac{3}{4}$

$\frac{2025}{4}$

$\frac{4 \mid 5 \mid}{8}$ $\frac{45}{8}$

$\sqrt{8\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}$
$\sqrt{8\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

$+8\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{16}$

$8\frac{7}{16}$
$3\frac{3}{4}$

$\sqrt{31\frac{41}{64}}$
$\frac{2025}{64}$

($5\frac{5}{8}$ area D C E.

Prop. III.



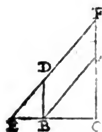
38. *Quinti.*

Sit A B 7 ◎ : A C 9 ◎ : B C 8 ◎. Cum ergo ut BA ad AC ita BD ad DC est; sed BA ad AC ratio subsuperbipartiens septimas est; ergo BD 3 ◎ 5 ① erit, D C vero 4 ◎ 5 ①. Vel ut BA, A C simul ad B A, ita B C ad B D, 5 ◎ 5 ①; qua de BC ablata, erit DC 4 ◎ 5 ① ut antea.

Quia omnia A B C trianguli latera dantur, ergo & anguli, B nempe 63 Grad. 6. Min. C. 57 Gr. 31. Min. Sed notis duobus lateribus [ut BA 7 BD $3\frac{1}{2}$ vel A C 9 DC $4\frac{1}{2}$] cum uno angulo [ut B vel C iam inventis] anguli B A D, D A C invenientur, quilibet 29. Gr. 41. Min. 30. Sec.

Prop. IV.

47. *Primi.*

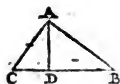


Sit AC 8 ◎ BC 6 ◎ ergo B A 10 ◎ erit. Sit D E 4 ◎ : quare BE 3 ◎ erit & DE 5 ◎. Sed A C ad D B ratio dupla est, & C B ad BE dupla quoque erit. Sic & A B ad DE, ratio, dupla est.

A erit 36. Grad. 53. Min. æqualis D; & B 53. Grad. 7. Min. æqualis E.

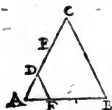
Prop.

Prop. VIII.



Sit AC 9 ◎ AB 12 ◎. Ergo CB 15 ◎ erit. 47. Primi.
Iam ut BC ad CA ita CA ad CD 5 ◎ 4 ① qua à CB ablata erit DB 9 ◎ 6 ①. Quadrato de CD à quadrato de CA ablato, relinquetur pro AD 7 ◎ 2 ①. Vel ut CA 47. Primi.
ad AB, ita CD ad DA. Et ut CB ad BA ita CA ad AD.

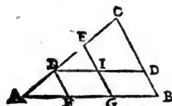
Erit itaque C 53. Grad. 8. Min. æqualis DAB angulo, & B 36. Grad. 52. Min. æqualis CAD angulo.



Prop. IX.

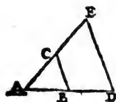
Sit CA 18 ◎ AB 15 ◎ AD 6 ◎. Vt ergo AC ad DA ita BA ad FA 5 ◎.

Prop. X.



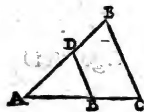
Eadem via partes insectæ per sectam inveniuntur, ut in præcedenti.

Prop. XI.



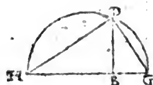
AB 8 ◎ sit, AC 6 ◎. æqualis BD. ut AB ad BD ita AC ad CE 4 ◎ 5 ①.

Prop. XII.



AB 8 ◎ sit, BC 6 ◎ AD 4 ◎ 5 ①: vt AB ad BC ita AD ad DE 3 ◎ 375 ③.

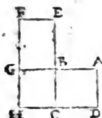
Prop. XIII.



AB 9 ⓪ 6 ① BC 5 ⓪ 4 ① Ducatur AB in BC, facto educta radix quadrata, media proportionalis BD erit 7 ⓪ 2 ①.

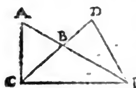
Sit AB, BC *ut antea. Quia* AB, BC *unam rectam constituunt, tota* AC 15 *erit, quare* AE 7 $\frac{1}{2}$ *erit. Sed* EC *est* AE *æqualis, ablata itaque* BC 5 $\frac{2}{5}$ *ab* EC *relinquetur* EB 2 $\frac{1}{10}$ *cuius quadrato* 4 $\frac{41}{100}$ *ab* AE *quadrato hoc est, rady quadrato* 56 $\frac{1}{4}$ *ablato relinquetur quadratum de* BD 51 $\frac{84}{100}$ *quare ipsa* BD *erit* 7 $\frac{1}{5}$ *ut superius quoque invenimus.*

Prop. XIV.



Sit rectangulum BF 32 æquale BD rectangulo. Sit BG 4 ergo BE 8 erit. Sit BC 2 ergo BA 16 erit. Iam EB ad BC ratio, quadrupla est; ita AB ad BG.

Prop. XV.



Dantur AB 8 BC 9 DB 6 BE 12 & ABC angulus 60 Grad opposito suo DBE æqualis. Invenientur ergo per Sinuum Tabulas AC 8 $\frac{54188}{100000}$ DE 10 $\frac{39230}{1000000}$. Si calculus fiat ex secundo lemmate, ABC trianguli area erit 31 $\frac{176604}{1000000}$: tantum quoque pro DBE trianguli capacitate emerget: vera ergo propositio est.

Prop. XVI.



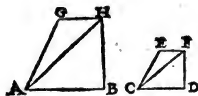
Sit A 16 ⓪ B 2 ⓪ C 32 ⓪ D 4 ⓪ Ex ductu A in D 64 ⓪ oriuntur: & vicissim ex B in C ductu, tantundem nascitur. Parallelogramma ergo AD, BC æqualia sunt.

PROP. XVII.



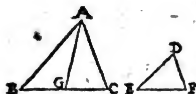
Sit A 32 ◎ B 8 ◎ æqualis C ergo D 2 ◎. Quadratum CB 64 ◎ æquale eſt rectangulo AD.

PROP. XVIII.



Sit CD 5 ◎ DF 7 ◎ EF 8 ◎ ergo cum CDF, DFE anguli recti ſint, erit ED 10 ◎ 6301 ◎ ſive $\sqrt{113}$. EC 7 ◎ 2801 ⊕ ſive $\sqrt{53}$. Sit & AB 7 ◎. Vt ergo CD ad AB ita DF ad BH 9 ◎ 5 ①. Et ut DF ad FE ita BH ad HG 108 ◎ 571 ◎ & ut CD ad CE ita AB ad AG 10 ◎ 192 ①. 47. *Primi.*

PROP. XIX.



Sit BC 21 ◎ æqualis AB: AC vero 14 ◎ & EF 12 ◎. Ergo ED 12 ◎ erit, & DF 8 ◎. Cum itaque ſit ut CB ad FE, ita EF ad BG, erit BG 6 ◎ 8571 ⊕ GC vero 14 ◎ 1429 ⊕. Sed BC ad BG ratio eſt tripla ſeſquidecimaſexta. BC vero ad EF ratio eſt ſupertripartiens quartas. Primæ ergo BC ad tertiam BG ratio, duplicata eſt rationis BC primæ ad EF ſecundam; cum ſupertripartiens quartas ratio, in ſe ducta, producat triplam ſeſquidecimamſextam rationem. An triangula ABC, DEF duplicatam habeant ratianem, non difficile eſt experiri in numeris. Area trianguli ABC eſt $\sqrt{19208}$ ſive 138 ◎ 5929 ⊕, trianguli DEF area eſt $\sqrt{2048}$ ſive 45 ◎ 2548 ⊕. Dividatur ABC per DEF aream, prodibit denominater rationis, quæ eſt tripla ſeſquidecimaſexta. Ita quoque experiri licet an triangulum ABG triangulo DEF ſit æquale. Cadens puncto A ſuper BC perpendicularis erit

Nota quomodo ratio triangulorum dignoſcatur cognita ratione laterũ ignota area.

1. Lemma Conuersum erit √ 174 $\frac{?}{?}$; sive 13 ⓪ 19932 ⑤ cuius quadrato à quadrato de AC ablato, relinquetur quadratum rectæ inter pependicularem & C: ipsa ergo recta, erit 4 ⓪ 6666 ④ hac de GC ablata, relinquetur reliqua inter perpendicularem & G 9 ⓪ 4761: Huius quadrato cum quadrato perpendiculi composito, habebitur quadratum de AG. Ipsa ergo AG erit, $\sqrt{264\frac{1}{49}}$ sive 16 ⓪ 2493 ④. Nota ergo sunt omnia latera trianguli ABG, area ergo erit 45 ⓪ 25 ②.

AB. 21
BG $6\frac{6}{7}$
GA $\sqrt{264\frac{1}{49}}$

$27\frac{6}{7} + \sqrt{264\frac{1}{49}}$
$13\frac{13}{14} + \sqrt{66\frac{1}{196}}$
$13\frac{13}{14} - \sqrt{66\frac{1}{196}}$

$134\frac{1}{196}$
$-66\frac{1}{196}$

128

$\sqrt{66\frac{1}{196}} + 7\frac{1}{14}$
$\sqrt{66\frac{1}{196}} - 7\frac{1}{14}$

$66\frac{1}{196}$
$50\frac{1}{196}$

16
128

$\sqrt{2048}$ area AEG.

Prop. XX.

Sint ordinata pentagona, ABCDE: FGHKL, *quorum latera nota sint:* AB $\sqrt{.2\frac{1}{2}} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ & FG $\sqrt{.90 - \sqrt{1620}}$. *Cum itaque triangula* ABC, FGH *similia sint, ut ad textum demonstravimus, erunt latera proportionalia. Nota itaque* AC, *quæ est* $\sqrt{.2 + \sqrt{.1\frac{1}{4}}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ *sive* $\sqrt{.2\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ *hoc est in numeris absolutis*, 1 ⓪ 90211298 ⑧ *innotescet* FH. *Nam.*

ut AB ad AC, ita FG ad FH
$\sqrt{.2\frac{1}{2}} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ ... $\sqrt{.2\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ ... $\sqrt{.90 - \sqrt{1620}}$ ... $\sqrt{.90 + \sqrt{1620}}$

$\sqrt{.2\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$

$+6\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{4}$

$\sqrt{5}$ divisor.

$\sqrt{.2\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{6}$

180
45

225
-45

$\sqrt{180}$.

$\sqrt{180}$
$\sqrt{.2\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$

360
90

$\sqrt{.450 + \sqrt{40500}}$
FH. $\sqrt{.90 + \sqrt{1620}}$

Sunt

Sunt ergo triangula similia, & numero æqualia. Nam Palygonum ABCDE *in triangula tria divisum est*, ABC, acd, ADE, *in totidem quoque* FGHKL *polygonum factum est triangula*, FGH, fhk, FKL. *Iam vero inquirendum an Laterum homologorum duplicatam rationem habeant. Inquiratur primum quæ sit laterum* AB *ad* FG *vel* AC *ad* FH *ratio, quæ invenietur subsexdupla, diviso lateris* FG *numero, per* AB *lateris numerum, hoc modo.*

AB. $\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$6\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{4}$
$\surd 5$ divisor

FG $\surd.90 - \surd 1620$
$\surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$\surd 180$
$\surd 36$
ratio est ut 1. ad 6

ergo duplicata ratio erit ut 1 ad 36, quæ hoc modo invenitur, ex quadratis laterum.

$2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$ $\quad 90 - \surd 1620$
$2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$ $\quad 2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$6\frac{1}{4}$ $\quad 180$
$1\frac{1}{4}$ $\quad$ ut 1. ad 36.
5 divisor.

Ratio polygoni ad polygonum invenietur, cognita area, quæ erit ut 1 *ad* 36. *Polygonorum areæ facilis inventio est, cum omnium triangulorum cognita sint latera: calculus ergo singulorũ per* 2 *lemma instituatur hoc modo.*

AC. $\surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
AB. $\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
BC. $\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\surd.10 - \surd 20 + \surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4} + \surd.\frac{5}{8} + \surd\frac{5}{64}$
$\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4} - \surd.\frac{5}{8} + \surd\frac{5}{64}$
$+ 2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$- \frac{5}{8} + \surd\frac{5}{8}$
$\frac{15}{8} - \surd\frac{125}{64}$

$\surd.\frac{5}{8} + \surd\frac{5}{64}$
$\surd.\frac{5}{8} + \surd\frac{5}{64}$
$\frac{5}{8} + \surd\frac{5}{64}$
$\frac{15}{8} - \surd\frac{125}{64}$
$+ \frac{25}{64}$
$- \frac{25}{63}$
$\surd.\frac{50}{64} + \surd\frac{500}{4096}$ area trianguli ABC. Sed cum Latera AB *bc*, lateribus AE, *ed* æqualia sint, & anguli dictis lateribus contenti; erunt quoque tota triangula ABC. ADE inter se æqualia, quare eadem Area utriusque erit. *4. Primi.*

Addantur triangula
ABC. $\surd.\frac{50}{64} - \surd\frac{500}{4096}$
ADE. $\surd.\frac{50}{64} - \surd\frac{500}{4096}$
summa $\surd.\frac{300}{64} - \surd\frac{8000}{4096}$

Calculus trianguli A C D.

$$\text{CD. } \surd.2\tfrac{1}{2} - \surd 1\tfrac{1}{4}$$
$$\text{AC. } \surd.2\tfrac{1}{2} + \surd 1\tfrac{1}{4}$$
$$\text{AD. } \surd.2\tfrac{1}{2} + \surd 1\tfrac{1}{4}$$

$$\surd.10 + 20 + \surd.2\tfrac{1}{2} - \surd 1\tfrac{1}{4}$$

$$\surd.2\tfrac{1}{2} + \surd 1\tfrac{1}{4} + \surd.\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$
$$\surd 2\tfrac{1}{2} + \surd 1\tfrac{1}{4} - \surd.\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$

$$+ 2\tfrac{1}{2} + \surd 1\tfrac{1}{4}$$
$$- \tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$

$$\tfrac{15}{8} + \surd\tfrac{125}{64}$$

$$\surd.\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$
$$\surd.\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$

$$\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$
$$\tfrac{15}{8} + \surd\tfrac{125}{64}$$

$$+ \tfrac{75}{64}$$
$$- \tfrac{25}{64}$$

$\surd.\frac{50}{64} + \surd\frac{500}{4096}$ area trianguli A C D. Omnia iam triangula si addantur, summa æqualis pentagoni ABCDE areæ erit.

4 Secund.

$$\tfrac{200}{64} - \surd\tfrac{8000}{4096}$$
$$\tfrac{50}{64} + \surd\tfrac{500}{4096}$$

$$\tfrac{250}{64} - \surd\tfrac{4500}{4096} \quad 30$$
$$+ \surd\tfrac{32000}{4096} \quad 80$$

$$\tfrac{250}{64} + \surd\tfrac{13500}{4096}$$

$$\tfrac{200}{64} - \surd\tfrac{8000}{4096} \quad 40$$
$$\tfrac{50}{64} + \surd\tfrac{500}{4096} \quad 10$$

$$+ \tfrac{10000}{4096}$$
$$- \tfrac{2000}{4096}$$

$$\tfrac{8000}{4096}$$
$$+ \surd\tfrac{32000}{4096}$$

$\surd.3\frac{29}{32} + \surd 3\frac{53}{1024}$ area pentagoni A B C D E. *Vniversæ operationis* δοκιμασία *est; si perpendicularis centro circuli cui inscriptum est pentagonum, super aliquod laterum pentagoni cadens, in dimidium basis ducatur, productum vero, per numerum multitudinis laterum polygoni multiplicetur. Vt perpendicularis super* A B *cadens est* $\surd.\frac{3}{8} + \surd\frac{5}{64}$ *dimidium lateris est* $\surd.\frac{5}{8} - \surd\frac{5}{64}$*, productum* $\surd.\frac{10}{64} + \surd\frac{5}{1024}$ *per 5 id est per 25, multiplicetur; prodibit area pentagoni ut antea.*

1. Lemm.

12. Quar.

$$\surd.\tfrac{3}{8} + \surd\tfrac{5}{64}$$
$$\surd.\tfrac{5}{8} - \surd\tfrac{5}{64}$$

$$+ \tfrac{15}{64}$$
$$- \tfrac{5}{64}$$

$$\surd.\tfrac{10}{64} + \surd\tfrac{5}{1024}$$
$$25 \qquad 625$$

$\surd.3\frac{29}{32} + \surd 3\frac{53}{1024}$ area pentag.

Quæratur iam area pentagoni FGHKL. Calculus trianguli FGH.

FH. $\surd.90 + \surd 1620$
FG. $\surd.90 - \surd 1620$
GH. $\surd.90 - \surd 1620$

$\surd.360 - \surd 25920 + \surd.90 + \surd 1620$

$\surd.90 - \surd 1620 + \surd.22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$
$\surd.90 - \surd 1620 - \surd.22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$

$90 - \surd 1620$
$- 22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$

$67\frac{1}{2} - \surd 2531\frac{1}{4}$

$\surd.22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$
$\surd.22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$

$22\frac{1}{2} + \surd 101\frac{1}{4}$ 45
$67\frac{1}{2} - \surd 2531\frac{1}{4}$ 9

$1518\frac{3}{4}$
$-506\frac{1}{4}$

$\surd.1012\frac{1}{2} - \surd 205031\frac{1}{4}$ area trianguli FGH. Sed eidem æquale est triangulum FKL. Addantur ergo triangula FGH. $\surd.1012\frac{1}{2} - \surd 205031\frac{1}{4}$
FKL. $\surd.1012\frac{1}{2} - \surd 205031\frac{1}{4}$

Summa est. $\surd.4050 - \surd 3280500$

Calculus trianguli FHK.

HK. $\surd.90 - \surd 1620$
FK. $\surd.90 + \surd 1620$
FH. $\surd.90 + \surd 1620$

$\surd.360 + \surd 25920 + \surd.90 - \surd 1620$

$\surd.90 + \surd 1620 + \surd.22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$
$\surd.90 + \surd 1620 - \surd.22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$

$90 + \surd 1620$
$- 22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$

$67\frac{1}{2} + \surd 2531\frac{1}{4}$

$\surd.22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$
$\surd.22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$

$22\frac{1}{2} - \surd 101\frac{1}{4}$
$67\frac{1}{2} + \surd 2531\frac{1}{4}$

$1518\frac{3}{4}$
$506\frac{1}{4}$

$\surd.1012\frac{1}{2} + \surd 205031\frac{1}{4}$ area trianguli FHK. Addantur iam omnia triangula, summa erit area pentagoni FGHKL.

Triã. FGH.FKL. $4050 - \surd 3280500$ 1620
FHK. $1012\frac{1}{2} + \surd 205031\frac{1}{4}$ 405

$5062\frac{1}{2} - \surd 1845281\frac{1}{4}$ 1215
$+ \surd 13122000$ 2025

$\surd.5062\frac{1}{2} + \surd 5125781\frac{1}{4}$ pentagoni FGHKL area.

$4050 - \surd 3280500$
$1012\frac{1}{2} + \surd 205031\frac{1}{4}$

+4100625
−820125
3280500
4
+ $\surd$ 13122000
1 2

Si quis

Si quis δοκιμασίαν *hic adhibere voluerit, qua superius usi sumus, facile poterit. Nam cum ut rectæ* AB, *dimidia* $\sqrt{.\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{5}{64}}$ *ad perpendicularem suam* $\sqrt{.\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{5}{64}}$ *sit, ita rectæ* FG, *dimidia* $\sqrt{.22\frac{1}{2}} - \sqrt{101\frac{1}{4}}$ *ad suam perpendicularum erit, quæ est* $\sqrt{.13\frac{1}{2}} + \sqrt{101\frac{1}{4}}$. *Invenietur itaque ut antea area pentagoni* FGHKL $\sqrt{.5062\frac{1}{2}} + \sqrt{5125781\frac{1}{4}}$.

Sed ut ratio ABCDE *pentagoni ad* FGHKL *pentagonū inveniatur, dividatur hoc per illud, invenietur esse ut 1 ad 36. Operatio sequitur.*

$\sqrt{.\frac{125}{32}} + \sqrt{\frac{3125}{1024}}$ — $\sqrt{.\frac{10125}{2}} + \sqrt{\frac{20503125}{4}}$ — $\frac{4050}{1}$

$\sqrt{.\frac{125}{32}} - \sqrt{\frac{3125}{1024}}$ • $\sqrt{.\frac{125}{32}} - \sqrt{\frac{3125}{1024}}$ — $\frac{50}{32}$

$\frac{15625}{1024}$ — $\frac{1265625}{1024}$

$-\frac{3125}{1024}$ — $-\frac{253125}{1024}$ — $-\frac{1012500}{1024}$

$\sqrt{\frac{12500}{1024}}$ divisor. — $\sqrt{\frac{1012500}{64}}$ — 1036800000

63
1155 1818
10368000 (82944 (1296
125 64

Est ergo ABCDE *ad* FGHKL, *ut* $\sqrt{1}$ *ad* $\sqrt{1269}$ *hoc est ut* 1 *ad* 36, *quæ est duplicata rationis laterum. Erant enim latera ut* 1 *ad* 6.

Institui & alia δοκιμασία *potest, quæ plane cum ipso propositionis sensu conveniat, hunc ad modum. Ut quadratum lateris* AB $2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ *ad aream pentagoni,* ABCDE $\sqrt{.3\frac{29}{32}} + \sqrt{3\frac{53}{1024}}$ *est, ita quadratum lateris* FG $90 - \sqrt{1620}$ *ad aream pentagoni,* FGHKL *erit, quæ invenietur ut antea* $\sqrt{.5062\frac{1}{2}} + \sqrt{5125781\frac{1}{4}}$. *In rationalibus numeris, ut est* 1. *ad* 36 *ita erit* $2\frac{37764}{100000}$ *area minoris pentagoni, ad areā* $85\frac{59509}{100000}$ *pentagoni majoris. Operatio prioris Sequitur.*

$2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ ..... $\sqrt{.\frac{125}{32}} + \sqrt{\frac{3125}{1024}}$ .... $90 - \sqrt{1620}$ surdi

$2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ — $9720 - \sqrt{52488000}$ quadratū

$\frac{125}{32} + \sqrt{\frac{3125}{1024}}$

5 divisor.

Surdi $2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ — $\sqrt{.\frac{810000}{32}} - \sqrt{\frac{1312200000000}{1024}}$ productū

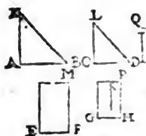
quadratum $7\frac{1}{2} + \sqrt{31\frac{1}{4}}$ est. — $\sqrt{.7\frac{1}{2}} + 1631\frac{1}{4}$

Si hic surdus per 5 dividatur, $\sqrt{.\frac{810000}{64}} + \sqrt{\frac{1312200000000000}{4096}}$ productū.

Quotus erit. $\sqrt{.5062\frac{1}{2}} + \sqrt{5125781\frac{1}{4}}$ area pentagoni maioris ut antea.

143

PROP. XXII.



Sit AB 15 *ad* CD 12 *ut* EF 9 *ad* GH $7\frac{1}{5}$. *Sed ut* AB *ad* CD *ita* CD *ad* Q $9\frac{3}{5}$. *Et ut* EF *ad* GH *ita* GH *ad* R, $5\frac{19}{25}$. *Est autem* AB *ad* Q *ratio Supernonipartiens decimas-sextas: Et* EF *ad* R *eadem. Quare triangulum* ABK *ad* CDL *triangulum, &* EM *rectangulum ad* GP *rectangulum erit ut* 25 *ad* 16. *Nam cum* AK 18 *&* AB 15 *sit, erit* CL $14\frac{2}{5}$ *eo quod* CD 12 *est. Est autem* FM, AK *aequalis, &* HP, CL. *Triangulum ergo* ABK 135 *erit* CDL $86\frac{2}{5}$: *&* EM *rectangulum* 162, GP *rectangulum*, $103\frac{17}{25}$. *Si* 135 *per* $86\frac{2}{5}$ *dividantur prodibunt* $1\frac{9}{16}$ *pro rationis denominatore, & si* 162 *per* $103\frac{17}{25}$ *idem quoque rationis denominatur prodibit, quem antea posuimus. Vera ergo propositio est.*

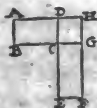
19. Sexti.
4. Sexti.
2. Lemm.

AK 18
AB 15
BK. $\surd 549$
______
$33 + \surd 549$
______
$16\frac{1}{2} + \surd 137\frac{1}{4}$
$16\frac{1}{2} - \surd 137\frac{1}{4}$
______
$272\frac{1}{4}$
$137\frac{1}{4}$
______
135 area trianguli ABK.

CL. $14\frac{2}{5}$
CD. 12 $\surd 351\frac{9}{25}$
______
$26\frac{2}{5} + \surd 351\frac{9}{25}$
______
$13\frac{1}{5} + \surd 87\frac{21}{25}$
$13\frac{1}{5} - \surd 87\frac{21}{25}$
______
$174\frac{6}{25}$
$87\frac{21}{25}$
______
$86\frac{2}{5}$ area trianguli CDL.

18 FM
9 EF.
______
162 rectangulum EM.
$14\frac{2}{5}$ HP.
$7\frac{1}{5}$ GH
______
$103\frac{17}{25}$ GP rectangulum.

PROP. XXIII.

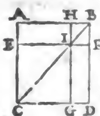


Sit BC 8, CG 5, DC 7, CE 11. Quia DHG angulus rectus est, ducatur BC in CD erit rectangulum BD 56 & CF rectangulum 55, si EC in CG ducatur. Quia ergo AC rectanguli ad CF rectangulum ratio est superpartiens quinquagesimas quintas. Ratio vero BC ad CD est supertripartiens quintas & DC ad CE est subsuperquadrupartiens septimas.

Rectangulorum AC, CF ratio, composita dicetur ex ratione laterũ. Nam fracto 1 ⅖ in fractum ⅞ ducto, prodibit fractus 1 ⅓⅕.

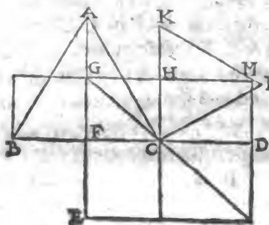
Cognita itaque proportione laterum parallelogrammorum, mediante hac propositione in ipsorum parallelogrammorũ proportionis cognitionem veniemus. Vt si BC *ad* CG *ratio sit* dupla sesquiquinta, *ratio vero* DC *ad* CE *sit* subsuperquadrupartiens septimas: *continuentur duæ hæ rationes in tribus numeris [quod fiet per 4 prop. 8 libri, quem cum reliquis* Euclidis *libris, simili commentandi ratione illustratum, si gratum lectori laborem nostrum esse intellexerimus, in lucem emittemus: Vel etiam hoc modo; priore proportione 11 ad 5 posita, fiat ut 7 ad 11 (quæ est posterior proportio) ita 5 ad alium, invenietur 7 ⁶⁄₇. Ita ergo tres numeri, duas illas proportiones habentes, stabunt, 11. 5. 7 ⁶⁄₇. Tertio ad unicam fractionem ⁵⁵⁄₇ reducto, reliquisque duobus per denominatorem multiplicatis, erunt duo producti numeri, 77. 35. & numerator 55, tres numeri integri, in iisdem proportionibus.] 77. 35. 55. ita ut sit 77 ad 35 sicut 11 ad 5, & 35 ad 55 & 7 ad 11. Et quia 77 ad 55 componitur ex proportionibus. 77 ad 35, & 35 ad 55, hoc est ex proportionibus laterum, erit ut 77 ad 55, ita parallelogram-*
23. Sexti. *mum* AC *ad parallelogrammum* CF, *quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum; id est proportio parallelogrammorum, denominabitur 1 ²⁄₅₅.*

PROP. XXIV.



Sit CA 12, AB 10, CE 9. Vt CA ad AB ita CE ad EI 7 ½. Et ut AB ad BD ita EI ad IG. Et ut BH ad HI ita IE ad EC; & ut BF ad FI, ita IG ad GC.

PROP. XXV.



Æquilatero ABC *triangulo, simile aliud ponatur, æquale* EC *quadrato hoc modo. Triangulo* ABC *rectangulum* BH *fiat æquale, ex praxi primi lemmatis: collocetur postea quadratum, ita ut aliquod eius latus productũ, per rectanguli utramque*

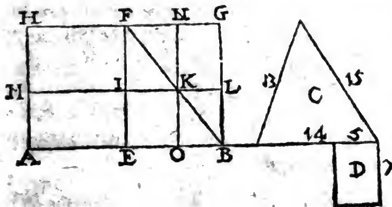
144

que latus transeat, ut EF *protracta in* G, *puncto* G *per* C *diagonalis ducatur totumque parallelogrammum* EM *perficiatur. Est itaque* 43.Primi.
CM *rectangulum, quadrato* EC *aequale. Sed* BH, CM *rectangula in eadem sunt altitudine. Inter* BC *&* CD *ergo, media proportionalis* CK *inveniatur, super qua* CKL *triangulum aequilaterum descriptum, aequale erit* EC *quadrato, simile vero* ABC *triangulo, ut superius in lineis ostendimus.*

Sit BC 28 ⊙ latus trianguli æquilateri, FC, quadrati EC, 13.*Secund.*
latus 14 ⊙. Ergo trianguli ABC perpendicularis AF est 24 ⊙ 1.*Lemma.*
2486 ⊕; parallelogrammi itaque BH altitudo GF est 12 ⊙ 24.*Sexti.*
1243 ⊕. Sed ut FG ad GH ita FE ad HM 16 ⊙ 1662 ⊕
æqualem CD. Ergo CK est 21 ⊙ 2756 ⊕. Quare CKL 13.*Sexti.*
triangulum 195 ⊙ 999 ① est. Sed CE quadratum 196 ⊙ 1.*Lemma.*
erat. Triangulum ergo CKL & EC quadratum æqualia sunt.

Sit ut antea BC 28, FC 14. *Ergo* AF. √ 588 *erit, &* FG √ 147. HM *itaque* √ 261¾ *est. Quare* CK *est* √ √ 204885¾. *Cum triangulum* CKL *simile sit* ABC *triangulo. Est autem hoc aequilaterum. Ergo & illud aequilaterum erit. Area itaque* CKL *trianguli* 196 *erit, tantũ quoque quadratum* CE *erat, rectangulo* CM *aequale.* 2.Lemm.

PROP. XXVIII.



Data recta AB 20 ⊙ sit, trianguli C basis 14 ⊙ crus lõgius 15 ⊙ brevius 13 ⊙. Rectanguli D latus lõgius 7 ⊙ brevius 5 ⊙. Ergo 4.*Sexti.*
ut 5 ⊙ ad EB 10 ⊙ ita 7 ⊙ ad EF 14 ⊙.
Sed FI est 8 ⊙ 8546 ⊕ IK itaque 6 ⊙ 3245 ⊕ erit. Nam 25.*Sexti.*
ut FE ad FI ita EB ad EO. Quare si AO 16 ⊙ 3245 ⊕ in 13.*Sexti.*
AM 5 ⊙ 1454 ⊕ ducatur, prodibunt 83 ⊙ 999 ① pro AK
rectanguli area. Est autem C 84 ⊙. Triangulum ergo C, & 2.*Lemma.*
parallelogrammum AK æqualia sunt.

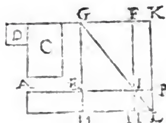
Pro

Pro FI *in surdis numeris invenimus* $\sqrt{78\frac{2}{5}}$ *pro* IK $\sqrt{40}$: *Ergo* AM $14 - \sqrt{78\frac{2}{5}}$, AO $10 + \sqrt{40}$ *erit. Si in se ducantur hæ rectæ, exacte* 84 *prodibunt pro area rectanguli* AK.

PROP. XXIX.

4. Sexti.

25. & 13. Sexti.



Data recta AI 30 ⓪ sit, C longius latus 15 ⓪ brevius 10 ⓪, D longius 8 ⓪ brevius 6 ⓪: ut ergo 6 ad EI ita 8 ad EG 20 ⓪. Sed GH est 24 ⓪ 4948 ④. HL itaque 18 ⓪ 3711 ④ erit. Nam ut GE ad GH ita HM ad HL. Si ergo BL 4 ⓪ 4948 ④ in AB 33 ⓪ 3711 ④ ducatur, pro AL rectanguli area, 149 ⓪ 999 ③ prodibunt. Est autem C rectangulum 150 ⓪. AL ergo & C æqualia sunt.

Pro GH *in surdis invenimus* $\sqrt{600}$ *pro* HL $\sqrt{337\frac{1}{2}}$. *Ergo* EH, *æqualis* BL, $\sqrt{600} - 20$ AB $\sqrt{337\frac{1}{2}} + 15$ *erit. Si in se ducantur hæ rectæ, exacte* 150 *prodibunt, pro area rectanguli* AL.

PROP. XXXI.

4. Sexti.

47. Primi.



Rectanguli AGB latus longius 14 ⓪ sit, brevius 5 ⓪ & BFC rectanguli longius 20 ⓪; brevius ergo erit 7 ⓪ 1428 ④. Rectanguli vero AEC latus longuis 24 ⓪ 4131 ④ brevius 8 ⓪ 7188 ④ erit. Rectangula AGB, BFC composita, efficiunt 212 ⓪ 856 ③ Tantum quoque invenietur pro AEC rectangulo.

Invenietur pro AEC *rectanguli latere longiore, in surdis numeris,* $\sqrt{596}$ *breviore* $\sqrt{76\frac{1}{49}}$, *quæ si in se ducantur, producti potestate resoluta, prodibit area* $212\frac{6}{7}$ *exacte. Tantum quoque* AGB, BFC *rectangula composita efficiunt.*

FINIS GEOMETRIÆ EVCLIDIS.